Graciela Salicrup
Pionera de la topología categórica

Carlos Prieto

Instituto de Matemáticas – Coloquio

4 de junio de 2007

Graciela's mathematical work, impressive as it is, didn't seem to do justice to this remarkable woman.

Horst Herrlich

La obra de Graciela se basa en la estructura categórica de la categoría $\mathcal{T}\mathrm{op}$ de los espacios topológicos y las aplicaciones continuas. Veremos algunos ejemplos de esa estructura.

Definición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría concreta. Una *categoría de conexión* $\mathcal{C}'$ en $\mathcal{C}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{C}$ que cumple:

- Si X_λ, $\lambda \in \Lambda$, son objetos de $\mathcal{C}'$ tales que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es objeto de $\mathcal{C}'$.
- Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función suprayectiva, que es un morfismo en $\mathcal{C}$, y X es objeto de $\mathcal{C}'$, entonces Y también es objeto de $\mathcal{C}'$.

Ejemplos

- La subcategoría $\mathcal{C}\mathrm{on}$ de los espacios conexos en $\mathcal{T}\mathrm{op}$ es de conexión.
- La subcategoría $\mathcal{C}\mathrm{ontray}$ de los espacios conectables por trayectorias en $\mathcal{T}\mathrm{op}$ es de conexión.

Otro concepto que juega un papel importante en el trabajo de Graciela (y R. Vázquez) es el siguiente:

Definición

Una *reflexión* de una categoría $\mathcal{C}$ en una subcategoría plena $\mathcal{C}'$ consta de un morfismo en $\mathcal{C}$, $\alpha : X \longrightarrow X'$, con X' objeto de $\mathcal{C}'$ con la siguiente propiedad universal:
Si Y' es un objeto de $\mathcal{C}'$ y $f : X \longrightarrow Y'$ es un morfismo de $\mathcal{C}$, entonces existe un morfismo $f' : X' \longrightarrow Y'$ tal que

$$f' \circ \alpha = f\,.$$

En un diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & X' \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & Y' \end{tikzcd}$$

Se dice que $\mathcal{C}'$ es una subcategoría (*monor-, epir-*)*reflexiva* en $\mathcal{C}$ (si α es un mono-, epimorfismo).

Ejemplos

- Sea G un grupo y $G_{\mathrm{ab}} = G/[G, G]$ su abelianización. Claramente se tiene la propiedad:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G_{\mathrm{ab}} \arrow[d, dashed, "\varphi'"] \\ & A \end{tikzcd}$$

donde A es un grupo abeliano.

Así, $\mathcal{A}\mathrm{b}$ es epirreflexiva en $\mathcal{G}\mathrm{rp}$, pues q es suprayectiva.

- Sea X un espacio métrico y X^* su completación. Claramente se tiene la propiedad:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & X^* \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

donde f es uniformemente continua y Y es un espacio métrico completo.

Así, $\mathcal{M}\mathrm{etrcomp}$ es monorreflexiva en $\mathcal{M}\mathrm{etr}$ pues α es inyectiva.

- Sea X un espacio de Tychonoff ($\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$, o completamente regular y T_1) y βX su compactación de Stone-Čech. Claramente se tiene la propiedad:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, dashed, "f'"] \\
& Y
\end{tikzcd}
$$

  donde f es continua y Y es un espacio compacto de Hausdorff.

Así, $\mathcal{C}\mathrm{omp}\mathcal{H}\mathrm{ff}$ es monorreflexiva en $\mathcal{T}\mathrm{op}_{3\frac{1}{2}}$, pues α es inyectiva.

- Sea S un semigrupo abeliano (semianillo) y kS la construcción de Grothendieck. Claramente se tiene la propiedad:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & kS \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & R \end{tikzcd}$$

  donde f es un homomorfismo de semigrupos (semianillos) y R es un grupo abeliano (anillo).

Así, $\mathcal{A}\mathrm{b}$ ($\mathcal{R}\mathrm{ing}$) es reflexiva en $\mathrm{semi}-\mathcal{A}\mathrm{b}$ ($\mathrm{semi}-\mathcal{R}\mathrm{ing}$) ($\alpha$ no es suprayectiva y sólo es inyectiva cuando S tiene cancelación).

Hay un concepto dual:

- Sea G un grupo y $G_{\mathrm{tor}} = \{g \in G \mid g \text{ tiene orden finito}\}$ su subgrupo de torsión. Claramente se tiene la propiedad dual:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, dashed, "\varphi'"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G_{\mathrm{tor}} \arrow[r, "j"'] & G \end{tikzcd}$$

  donde T es un grupo de torsión y φ es un homomorfismo arbitrario.

Así, $\mathcal{G}\mathrm{rp}_{\mathrm{tor}}$ es monocorreflexiva en $\mathcal{G}\mathrm{rp}$, pues j es inyectiva.

- Sea X un espacio topológico y kX el k-espacio determinado por X. Claramente se tiene:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, dashed, "f'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ kX \arrow[r, "j"'] & X \end{tikzcd}$$

  donde Y es un k-espacio y f es continua.

Así, k-$\mathcal{T}\mathrm{op}$ es epi-monocorreflexiva en $\mathcal{T}\mathrm{op}$, pues j es la identidad (inyectiva y suprayectiva).

En la vasta obra de Graciela, conceptos como la reflexividad o la correflexividad se relacionan con los de conexidad y coconexidad, tanto en $\mathcal{T}\mathrm{op}$ como en ciertas subcategorías de $\mathcal{T}\mathrm{op}$ (y de algunas categorías concretas más generales).

Para dar una idea, veamos la lista de publicaciones de Graciela:

1. Subgrupo de Jiang-Bo-Ju, F. de Ciencias, UNAM (tesis de licenciatura, 1969).
2. Fibraciones y correflexiones (con R. Vázquez), *An. Inst. Mat. UNAM* (1970).
3. Fibraciones y correflexiones II (con R. Vázquez), *An. Inst. Mat. UNAM* (1971).
4. Categorías de conexión, (con R. Vázquez), *An. Inst. Mat. UNAM* (1972).
5. T-cocientes (con R. Vázquez), *An. Inst. Mat. UNAM* (1973).

6. Reflexividad y coconexidad en $\mathcal{T}op$, *An. Inst. Mat. UNAM* (1974).
7. Expansiones A-conexas y subespacos A-máximos (con R. Vázquez), *An. Inst. Mat. UNAM* (1975).
8. Objetos máximos en categorías de conexión de $\mathcal{T}op$ (con R. Vázquez), *An. Inst. Mat. UNAM* (1975).
9. On functors with quasi-small fibres (con R. Vázquez), *An. Inst. Mat. UNAM* (1977).
10. Epirreflexividad y conexidad en categorías concretas topológicas (tesis doctoral), *An. Inst. Mat. UNAM* (1978).
11. Dispersed factorization structures (con R. Vázquez y H. Herrlich), *Canad. J. Math.* (1979).
12. Light factorization structures (con R. Vázquez y H. Herrlich), *Quaestiones Math.* (1979).

13. Connection and disconnection (con R. Vázquez), *Springer LNM* (1979).
14. Normal connection subcategories, *An. Inst. Mat. UNAM* (1980).
15. Multirreflexividad y multicorreflexividad, *Memorias SET* (1981).
16. Multiepireflective subcategories, *Topology & its Appl.* (1982).
17. Local monocoreflectivity in topological categories, *Springer LNM* (1982).
18. (E,M)-factorizations of morphisms, manuscrito inconcluso, ideas del cual fueron incluidas en la siguiente obra.
19. Factorizations, denseness, separation, and relatively compact objects (con H. Herrlich y G. Strecker), *Topology & its Appl.* (1987).