¿Cómo ayuda el Teorema de la Función Inversa a sus amigos, el Teorema de la Función Implícita, las Inmersiones y Submersiones?

Itzia Iztlacihuatl Justo Robledo
Asesor: Otoniel Nogueira da Silva

IV Verano de la Investigación en Matemáticas 2019
Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas UNAM

Introducción

El teorema de la función inversa es uno de los teoremas más conocidos y de los más importantes en matemáticas. Su historia se remonta al siglo XVIII cuando *Isaac Newton* daba las primeras ideas de lo que conocemos hoy e día como el teorema de la función implícita. Estas ideas se fueron desarrollando también por matemáticos como *Leibniz, Lagrange, Bernoulli, Euler y Cauchy*.
Al que se le atribuye principalmente el título de descubridor del teorema de la función implícita es a Cauchy, pues fue el que más se acercó a lo que conocemos como teorema de la función implícita. Sin embargo, quien estableció el teorema para varias variables fue un matemático italiano llamado *Ulisse Diri* en uno de sus trabajos en 1877.. Como dato curioso, en Italia, al teorema de la función implícita se le conoce como *Teorema de Diri*.

1. Diferenciación

Recordemos que dada una función $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su derivada en un punto $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ está definida por
$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
Notemos que esta definición la podemos reescribir como
$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h)$$
donde $r(h)$ es un residuo tal que
$$\frac{r(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$
En este caso $f'(x)$ es un número real, el cual, tiene múltiples aplicaciones e interpretaciones.

Consideremos ahora una función $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, ¿qué sucede en este caso? En este caso $f'(x)$ está definida como el vector $y \in \mathbb{R}^m$ para el cual
$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - y \right) = 0.$$
Notemos que este límite también lo podemos escribir de la forma
$$f(x+h) - f(x) = hy + r(h)$$
donde $r(h)$ es tal que $\frac{r(h)}{h} \to 0$ cuando $h \to 0$ y además hy define una función lineal de h. Así si $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, entonces $f'(x)$ define una transformación lineal de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^m$ que satisface
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0$$
o equivalentemente
$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} = 0.$$
También existen interpretaciones de este vector derivada. Ahora estamos listos para una de las definiciones más importantes.

Definición 1.1. Sean E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, f una función que manda E a $\mathbb{R}^m$ y $x \in E$. Si existe una transformación lineal $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que
$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = 0, \tag{1}$$
entonces decimos que f es *diferenciable* en x y además $f'(x) = A$.

Nota. Si f es diferenciable en cada $x \in E$, entonces decimos que f es *diferenciable* en E.

La derivada definida en (1) también es llamada *diferencial* de f en x, o *derivada total* de f en x.

Ejemplo 1: Tomemos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x + y, x - y, y)$ y veamos si es diferenciable en $(1, 2)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|f(1+h_1, 2+h_2) - f(1,2) - f'(1,2)\left(\begin{smallmatrix} h_1 \\ h_2 \end{smallmatrix}\right)\right|}{|(h_1,h_2)|} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|(3+h_1+h_2, -1+h_1-h_2, 2+h_2) - (3,-1,2) - \left((1,1)\left(\begin{smallmatrix} h_1 \\ h_2 \end{smallmatrix}\right), (1,-1)\left(\begin{smallmatrix} h_1 \\ h_2 \end{smallmatrix}\right), (0,1)\left(\begin{smallmatrix} h_1 \\ h_2 \end{smallmatrix}\right)\right)\right|}{|(h_1,h_2)|} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|(h_1+h_2, h_1-h_2, h_2) - (h_1+h_2, h_1-h_2, h_2)|}{|(h_1,h_2)|} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|(0,0,0)|}{|(h_1,h_2)|} = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es diferenciable en $(1, 2)$.

El próximo teorema establece que la derivada total de f en un punto $x \in E$, está bien definida. Es decir, si $f'(x) = A$ existe, entonces A es única.

Teorema 1.2. *Sean E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x \in E$. Si existen $A_1 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $A_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tales que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - A_1 h|}{|h|} = 0 \quad y$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - A_2 h|}{|h|} = 0$$

entonces, $A_1 = A_2$.

Ejemplo 2: Una pregunta muy natural es ¿cuál es la derivada de una transformación lineal? Si $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x) - A'(x)h}{h} &= 0 \\
\lim_{h\to 0} \frac{Ax + Ah - Ax - A'(x)h}{h} &= 0 \\
\lim_{h\to 0} \frac{Ah - A'(x)h}{h} &= 0 \\
\Rightarrow A &= A'(x)
\end{aligned}$$

Ahora enunciaremos uno de los resultados fundamentales en análisis.

Teorema 1.3 (Regla de la cadena)**.** *Sean E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que f es diferenciable en $x_0 \in E$, sea $g : D \subset f(E) \to \mathbb{R}^k$, donde D es un subconjunto abierto de $f(E)$ y g es diferenciable en $f(x_0)$. Entonces $F : E \to \mathbb{R}^k$ definida por*

$$F(x) = g(f(x))$$

es diferenciable en x_0 y

$$F'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Demostración. Hacemos $y_0 = f(x_0)$, $A = f'(x_0)$, $B = g'(y_0)$ y definimos

$$u(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah,$$

$$v(k) = g(y_0 + k) - g(y_0) - Bk,$$

para toda $h \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}^m$, para las cuales $f(x_0 + h)$ y $g(y_0 + k)$ están definidos. Entonces

$$|u(h)| = \varepsilon(h)|h|, \qquad |v(k)| = \eta(k)|k|, \tag{2}$$

donde $\varepsilon(h) \to 0$ cuando $h \to 0$ y $\eta(k) \to 0$ cuando $k \to 0$. Dado h, hacemos $k = f(x_0+h)-f(x_0)$. Entonces

$$|k| = |Ah + u(h)| \leq [\|A\| + \varepsilon(h)]|h|, \tag{3}$$

y

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) - BAh &= g(y_0 + k) - g(y_0) - BAh \\ &= v(k) + Bk - BAh \\ &= v(k) + B(k - Ah) \\ &= v(k) + B(f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah) \\ &= Bu(h) + v(k). \end{aligned}$$

De (2) y (3) se sigue que para $h \neq 0$,

$$\frac{|F(x_0 + h) - F(x_0) - BAh|}{|h|} \leq \|B\|\varepsilon(h) + [\|A\| + \varepsilon(h)]\,\eta(k).$$

Hacemos $h \to 0$, entonces $\varepsilon(h) \to 0$. También hacemos $k \to 0$, así $\eta(k) \to 0$ y de (3) se sigue que $F'(x_0) = BA = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

■

1.1. Derivadas parciales

Sean E un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$ y sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{u_1, \ldots, u_m\}$ las bases estándar de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Las *componentes* de f son las funciones reales $f_1, \ldots, f_m$ definidas por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i \qquad (x \in E) \tag{4}$$

o equivalentemente

$$f_i(x) = f(x)u_i, \qquad 1 \leq i \leq m.$$

Definición 1.4. Sean E un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : E \to \mathbb{R}^m$. Para $x \in E$, $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, definimos la *derivada parcial* de f_i con respecto x_j como

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t}. \tag{5}$$

Ejemplo 3: Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x^2y, 2x+2y, xy^2)$. Notemos que $f_1(x, y) = x^2y$, $f_2(x, y) = 2x+2y$ y $f_3(x, y) = xy^2$. Encontremos algunas derivadas parciales.

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x} &= \lim_{t\to 0} \frac{f_1((x,y)+te_1)) - f_1(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f_1(x+t,y) - f_1(x,y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)^2 y - x^2 y}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left((x+t)^2 - x^2\right) y}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\left(x^2 + 2xt + t^2 - x^2\right) y}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(2xt + t^2\right) y}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(2x+t)\, ty}{t} = \lim_{t\to 0} (2x+t)\, y = 2xy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial y} &= \lim_{t\to 0} \frac{f_2((x,y)+te_2)) - f_2(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f_2(x,y+t) - f_2(x,y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2x + 2(y+t) - 2x - 2y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{t} = \lim_{t\to 0} 2 = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_3}{\partial x} &= \lim_{t\to 0} \frac{f_3((x,y)+te_1)) - f_3(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f_3(x+t,y) - f_3(x,y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)y^2 - xy^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left((x+t) - x\right) y^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{ty^2}{t} = \lim_{t\to 0} y^2 = y^2.
\end{aligned}$$

Si tenemos una función diferenciable, es normal preguntarse si existen sus derivadas parciales. La respuesta es que sí, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 1.5. *Supongamos que f mapea un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y que f es diferenciable en un punto $x \in E$. Entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existen y*

$$f'(x)e_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_i \qquad (1 \leq j \leq n) \tag{6}$$

donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{u_1, \ldots, u_m\}$ son las bases estándar de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente.

Demostración. Dejamos j fija. Como f es diferenciable en x tenemos que,

$$f(x+te_j) - f(x) = f'(x)(te_j) + r(te_j)$$

donde $|r(te_j)|/t \to 0$ cuando $t \to 0$. La linearidad de $f'(x)$ muestra que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_j) - f(x)}{t} = f'(x)e_j. \tag{7}$$

Si representamos f en términos de sus componentes como en (4), entonces el límite anterior queda

$$\lim_{t\to 0} \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(x+te_j) - f_i(x)}{t} u_i = f'(x)e_j. \tag{8}$$

Se sigue que cada cociente en esta suma tiene límite cuando $t \to 0$, entonces cada $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existen y de (8) se concluye que

$$f'(x)e_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_i \qquad (1 \leq j \leq n).$$

■

Una consecuencia del Teorema anterior es que dada $[f'(x)]$ la matriz que representa $f'(x)$ con respecto a las bases estándar, podemos observar que $f'(x)e_j$ es el $j-$ésimo vector columna de $[f'(x)]$ y que el número $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ocupa el lugar de la $i-$ésima fila en la j-ésima columna de $[f'(x)]$. Así

$$[f'(x)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Además, si $h = \sum h_j e_j$ es algún vector en $\mathbb{R}^n$, entonces de (6) tenemos que

$$f'(x)h = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j \right\} u_i.$$

Observación. Notemos que el recíproco del teorema anterior no se cumple. Es decir, si tenemos una función $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que sus derivadas parciales existen, no necesariamente se cumple que f sea diferenciable. Por ejemplo, consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$$

la cual tiene derivadas parciales en el punto $(0, 0)$, sin embargo no es diferenciable en $(0, 0)$.

Un teorema que estaremos usando con frecuencia es el siguiente.

Teorema 1.6. *Supongamos que f mapea un conjunto abierto convexo $E \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, f es diferenciable en E, y hay un número real $M \geq 0$ tal que*

$$\|f'(x)\| \leq M$$

para cada $x \in E$. Entonces

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

para toda $a \in E, b \in E$.

Demostración. Fijamos $a \in E, b \in E$. Definimos $\gamma(t) = (1 - t)a + tb$ para toda $t \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) \in E$. Como E es convexo, $\gamma(t) \in E$ si $0 \leq t \leq 1$. Ahora hacemos

$$g(t) = f(\gamma(t)),$$

entonces

$$g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = f'(\gamma(t))(b - a),$$

de modo que

$$|g'(t)| \leq \|f'(\gamma(t))\||b - a| \leq M|b - a|$$

para toda $t \in [0,1]$. Por un resultado de análisis tenemos que si $h : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ y es diferenciable en (a,b), entonces existe $x \in (a,b)$ tal que $|h(b)-h(a)| \leq (b-a)|h'(x)|$. Aplicando este resultado tenemos que

$$|g(1) - g(0)| \leq |g'(t)|,$$

de aquí que

$$|g(1) - g(0)| \leq M|b - a|.$$

Pero, $g(0) = f(a)$ y $g(1) = f(b)$.

■

Nota. Si una función f cumple con lo establecido en el teorema anterior, entonces se dice que f es una *función lipschitziana* o que f cumple una condición de Lipschitz. Además, decimos que M es la constante de Lipschitz asociada a f.

A continuación presentamos un ejemplo sencillo de una función lipschitziana.

Ejemplo 4: Consideremos $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$. Notemos que, en efecto, es una función lipschitziana, pues existe $M = 1$ tal que

$$|f'(x)| = 1 \leq 1,$$

además

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq 1|x - y|.$$

Corolario 1.7. *Sean f y E como en el teorema anterior. Si $f'(x) = 0$ para toda $x \in E$, entonces f es constante.*

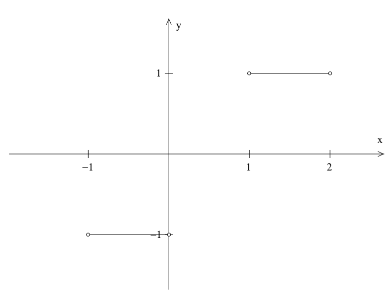
Para la demostración aplicamos el teorema anterior con $M = 0$.

Observación. Notemos que si quitamos la hipótesis de que E es convexo, entonces el corolario no necesariamente se cumple, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5: Sea $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $E = (-1,0) \cup (1,2)$ y f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \in (-1,0) \\ 1 & si \quad x \in (1,2) \end{cases}$$

Evidentemente f es diferenciable en E, su derivada $f'(x) = 0$ para toda $x \in E$, sin embargo f no es constante.



Definición 1.8. Un mapeo diferenciable f de un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ se dice ser *continuamente diferenciable* en E si f' es un mapeo continuo de E en $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Más

explícitamente , se requiere que para cada $x \in E$ y para da $\varepsilon > 0$ corresponda una $\delta > 0$ tal que

$$\|f'(y) - f'(x)\| < \varepsilon$$

si $y \in E$ y $|x - y| < \delta$.

Nota. Si esto sucede, decimos que f es un mapeo de clase $\mathcal{C}^1$ o que $f \in \mathcal{C}^1$.

El siguiente teorema nos da un criterio para saber cuando una función f es un mapeo $\mathcal{C}^1$

Teorema 1.9. *Supongamos que f mapea un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Entonces $f \in \mathcal{C}^1(E)$ si y solo si las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existen y son continuas en E para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.*

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{C}^1$. Por el Teorema 1.5 sabemos que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = (f'(x)e_j)u_i$$

para toda i, j y para toda $x \in E$. Así

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = [[f'(y) - f'(x)]e_j]u_i$$

y como $|u_i| = |e_j| = 1$ se sigue que

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leq |[f'(y) - f'(x)]e_j| \leq \|f'(y) - f'(x)\| < \varepsilon$$

si $|x - y| < \delta$. Por lo tanto $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ es continua. Para la otra implicación es suficiente considerar el caso $m = 1$. Fijamos $x \in E$ y $\varepsilon > 0$. Como E es abierto, existe una bola abierta $S \subset E$, con centro en x y radio r, la continuidad de las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ muestran que r puede ser elegido tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\right| < \frac{\varepsilon}{n} \qquad (y \in S, 1 \leq j \leq n). \tag{9}$$

Supongamos que $h = \sum h_j e_j$, $|h| < r$, hacemos $v_0 = 0$ y $v_k = h_1 e_1 + \cdots + h_k e_k$, para $1 \leq k \leq n$. Entonces

$$f(x + h) - f(x) = \sum_{j=1} n[f(x + y_j) - f(x + v_{j-1})]. \tag{10}$$

Como $|v_k| < r$ para $1 \leq k \leq n$ y como S es convexo, los segmentos con extremos $x + v_{j-1}$ y $x + v_j$ yacen en S. Como $v_j = v_{j-1} + h_j e_j$, el teorema del valor medio muestra que el j-ésimo sumando en (10) es igual a

$$h_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x + v_{j-1} + \theta_j h_j e_j)$$

para algún $\theta_j \in (0, 1)$, y esto difiere de $h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$ en por lo menos $|h_j|\varepsilon/n$, usando (9). De (10) se sigue que

$$\left|f(x + h) - f(x) - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |h_j|\varepsilon \leq |h|\varepsilon$$

para toda h tal que $|h| < r$. Esto dice que f es diferenciable en x y que $f'(x)$ es la función lineal que asigna el número $\sum h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$ con el vector $h = \sum h_j e_j$. La matriz $[f'(x)]$ consiste de las filas $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, y como las parciales son funciones continuas en E, se concluye que $f \in \mathcal{C}^1(E)$. ■

2. El principio de contracción

Ahora hablaremos de un teorema que es válido en cualquier espacio métrico completo y que además usaremos en la prueba de la función inversa, pero antes del teorema daremos la siguiente definicíon.

Definición 2.1. Sea X un espacio métrico con métrica d. Si $\varphi : X \to X$ y si existe un número $0 \leq c < 1$ tal que

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x, y) \tag{11}$$

para toda $x, y \in X$, entonces se dice que φ es una *contracción* de X en X.

Observación. Note que toda contracción es un afunción lipschitziana. Sin embargo, no toda función lipschitziana es una contracción, pues la constante de Lipschitz puede ser mayor o igual que 1.

A continuación ilustraremos esta definición con unos ejemplos bastante sencillos.

Ejemplo 6: Sea $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$. Sea $\varphi : X \to X$ definida por $\varphi(x) = \frac{x}{2}$. Veamos si φ es una contracción.

Solución.

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = \left|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right| = \left|\frac{x-y}{2}\right| = \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2}d(x, y)$$

Por lo tanto, φ es una contracción con $c = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 7: Sea $X = [1, \infty) \subset \mathbb{R}$ con la métrica usual. Sea $\varphi : X \to X$ definida por $\varphi(x) = \sqrt{x}$. Veamos si φ es una contracción.

Solución.

$$\begin{aligned} d(\varphi(x), \varphi(y)) = \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| &= \frac{\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \left|\sqrt{x} + \sqrt{y}\right|}{\left|\sqrt{x} + \sqrt{y}\right|} \\ &= \frac{|x-y|}{\left|\sqrt{x} + \sqrt{y}\right|} = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}|x-y| \\ &\leq \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2}d(x, y) \end{aligned}$$

Por lo tanto, φ es una contracción de X en X con $c = \frac{1}{2}$.

Teorema 2.2. *Si X es un espacio métrico completo y si φ es una contracción de X en X, entonces existe un único punto fijo $x \in X$ tal que $\varphi(x) = x$.*

Demostración. Primero probaremos la existencia del punto fijo. Sea $x_0 \in X$ un punto arbitrario. Definimos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente manera

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Escogemos $c < 1$ tal que (11) se cumple. Para $n \geq 1$ tenemos que

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \leq c\ d(x_n, x_{n-1}),$$

notemos que

$$c\ d(x_n, x_{n-1}) = c\ d(\varphi(x_{n-1}).\varphi(x_{n-2})) \leq c(c\ d(x_{n-1}, x_{n-2})) = c^2 d(x_{n-1}, x_{n-2})$$

por lo que procediendo inductivamente llegamos a que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n d(x_1, x_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Ahora, si $n < m$, se sigue que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n+1}^{m} d(x_{i-1}, x_i) \\ &\leq (c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{m-1}) d(x_1, x_0) \\ &\leq \left[\frac{1}{1-c} d(x_1, x_0)\right] c^n. \end{aligned}$$

Así $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Como X es completo, $x_n \to x$ para algún $x \in X$. Como φ es una contracción y es continua en X. Entonces

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Ahora probemos la unicidad. Supongamos que existen dos puntos fijos tales que $\varphi(x) = x$ y $\varphi(y) = y$, por (11) tenemos que

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c\ d(x, y)$$

pero x y y son puntos fijos, por lo que nos queda que

$$d(x, y) \leq c\ d(x, y),$$

pero esto se cumple si $d(x, y) = 0$, lo cual ocurre cuando $x = y$. Por lo tanto existe un único punto fijo. ■

Ejemplo 8: Recordemos los ejemplos anteriores.
Para $X = [0, 1]$ y $\varphi(x) = \frac{x}{2}$, el punto fijo es $x = 0$ pues

$$\varphi(0) = \frac{0}{2} = 0.$$

En el otro ejemplo donde $X = [1, \infty)$ y $\varphi(x) = \sqrt{x}$, el punto fijo es $x = 1$ pues

$$\varphi(1) = \sqrt{1} = 1.$$

Observación. Notemos que el teorema anterior no se cumple si falta alguna de las hipótesis, es decir, si X no es completo o si φ no es una contracción. A continuación se ilustrará esto con un ejemplo.

Ejemplo 9: En el primer inciso quitaremos la completitud del espacio métrico. En el segundo inciso quitaremos el hecho de que φ es una contracción.

(a) Sea $X = (0, 1] \subset \mathbb{R}$ un espacio métrico y sea φ una contracción de X en X definida por $\varphi(x) = \frac{x}{2}$. En este caso no existe $x \in X$ tal que $\varphi(x) = x$.

(b) Sea $X = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ y $\varphi : X \to X$ definida por $\varphi(x) = \sqrt{x}$. En este caso podemos ver que existen dos puntos fijos, a saber

$$\varphi(0) = \sqrt{0} = 0 \quad \text{y} \quad \varphi(1) = \sqrt{1} = 1.$$

3. Teorema de la Función Inversa

A continuación, enunciaremos uno de los teoremas más importantes del análisis, el Teorema de la Función Inversa. Dicho teorema tiene múltiples aplicaciones, de las cuales hablaremos un poco posteriormente.

Teorema 3.1. *Suponga que $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde E es abierto, $f \in \mathcal{C}^1(E)$, $f'(a)$ es invertible para algún $a \in E$ y $b = f(a)$. Entonces*

(a) Existen conjuntos abiertos U y V en $\mathbb{R}^n$ tales que $a \in U$, $b \in V$, f es inyectiva en U y $f(U) = V$;

(b) si $g : V \to U$ es la inversa de $f : U \to V$ (la cual existe por el inciso (a)), definida en V por

$$g(f(x)) = x \qquad (x \in U),$$

entonces $g \in \mathcal{C}^1(V)$. (ver figura 1)

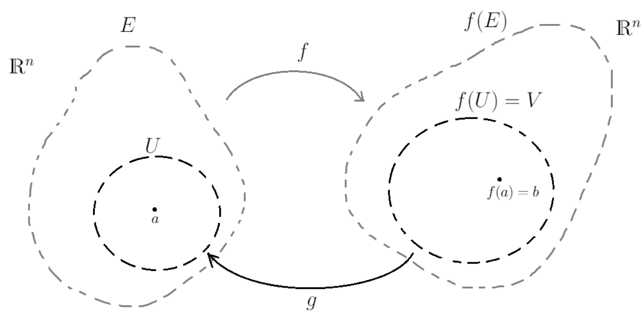


Figura 1: Idea intuitiva del T.F. Inversa

Demostración. (a) Hacemos $f'(a) = A$ y elegimos λ de modo que

$$2\lambda \|A^{-1}\| = 1.$$

Como f' es continua en a, existe una bola abierta $U \subset E$ con centro en a, tal que

$$\|f'(x) - A\| < \lambda \qquad (x \in U).$$

A cada $y \in \mathbb{R}^n$ le asociamos una función φ_y definida por

$$\varphi_y(x) = x + A^{-1}(y - f(x)) \qquad (x \in E). \tag{12}$$

Notemos que $f(x) = y$ si y solo si x es un punto fijo de φ_y. Como

$$\varphi_y'(x) = I - A^{-1}f'(x) = A^{-1}(A - f'(x)),$$

entonces

$$\|\varphi_y'(x)\| = \|A^{-1}(A - f'(x))\| = \|A^{-1}\|\|A - f'(x)\| < (2\lambda)^{-1}(\lambda) = \frac{1}{2}$$

Es decir,

$$\|\varphi_y'(x)\| < \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \qquad (x \in U).$$

Así por el Teorema 1.6, tenemos que

$$|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \qquad (x_1, x_2 \in U) \tag{13}$$

Se sigue que φ_y tiene a lo más un punto fijo en U, de modo que $f(x) = y$ para a lo más un $x \in U$. Entonces f es inyectiva en U.
Ahora hacemos $W = f(U)$ y escogemos $y_o \in W$. Entonces $y_0 = f(x_0)$ para algún $x_0 \in U$. Sea B una bola abierta con centro en x_0 y radio $r > 0$ tan pequeño que su cerradura $\bar{B}$ yace en U. Mostraremos que $y \in W$ cuando $|y - y_0| < \lambda r$.
Sea $y \in \mathbb{R}^n$ de modo que $|y - y_0| < \lambda$ y tomamos φ_y como en (12). Así

$$\begin{aligned}|\varphi_y(x_0) - x_0| &= |A^{-1}(y - f(x_0)| = \|A^{-1}\||y - y_0| \\ &< \|A^{-1}\|\lambda r(2\lambda)^{-1}(\lambda r) = \frac{r}{2}\end{aligned}$$

Si $x \in \bar{B}$ entonces

$$\begin{aligned}|\varphi_y(x) - x_0| &\leq |\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)| + |\varphi_y(x_0) - x_0| \\ &< \frac{1}{2}|x - x_0| + \frac{r}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.\end{aligned}$$

Así $\varphi_y(x) \in B$. Notemos que (13) se mantiene si $x_1 \in \bar{B}$ y $x_2 \in \bar{B}$.
Entonces φ_y es una contracción de $\bar{B}$ en $\bar{B}$. Al ser un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, $\bar{B}$ es completo. Del Teorema 2.2 concluimos que φ_y tiene un punto fijo $x \in \bar{B}$. Para este x tenemos que $f(x) = y$. Así $y \in f(\bar{B}) \subset f(U) = W$. Por lo tanto W es abierto y hacemos $W = V$.

(b) Escogemos $y \in V$, $y + k \in V$. Entonces existe un $x \in U$, $x + h \in U$ de modo que $y = f(x)$, $y + k = f(x + h)$. Nuevamente tomamos φ_y como en (12), entonces

$$\begin{aligned}\varphi_y(x + h) - \varphi_y(x) &= [x + h + A^{-1}(y - f(x + h))] - [x + A^{-1}(y - f(x))] \\ &= h + A^{-1}[f(x) - f(x + h)] = h - A^{-1}k\end{aligned}$$

Por (13) tenemos que

$$|\varphi_y(x + h) - \varphi_y(x)| = |h - A^{-1}k| \leq \frac{1}{2}|x + h - x| = \frac{1}{2}|h|.$$

Como $|h - A^{-1}k| \leq \frac{1}{2}|h|$, entonces $|A^{-1}k| \geq \frac{1}{2}|h|$ y

$$|h| \leq 2\|A^{-1}\||k| = \lambda^{-1}|k|. \tag{14}$$

Un resultado de Álgebra Lineal nos dice "*Dados dos operadores lineales $C, D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ donde C es invertible,*
si $\|D - C\|\|C\| < 1$ entonces D es invertible."(ver [2] *teorema 9.8*)
De aquí que $f'(x)$ tiene una inversa, digamos T, pues

$$\|f'(x) - A\|\|A^{-1}\| < \lambda(2\lambda)^{-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Como

$$g(y + k) - g(y) - Tk = h - Tk = -T[f(x + h) - f(x) - f'(x)h]$$

y (14) implica que

$$\frac{|g(y+k)-g(y)-Tk|}{|k|} \leq \frac{\|T\|}{\lambda}\frac{|f(x+h)-f(x)-f'(x)h|}{|h|} \tag{15}$$

Si hacemos que $k \to 0$, (14) muestra que $h \to 0$. El lado derecho de la desigualdad tiende a 0. De aquí que lo mismo se aplica para el lado izquierdo. De esta manera probamos que $g'(y) = T$, pero T fue elegido como la inversa de $f'(x) = f'(g(y))$.
En consecuencia

$$g'(y) = [f'(g(y))]^{-1} \qquad (y \in V) \tag{16}$$

Finalmente notemos que g es un mapeo continuo de V en U, que f' es un mapeo continuo de U en Ω que es el conjunto de todos los elementos invertibles de $L(\mathbb{R}^n)$ y que la inversión es un mapeo continuo de Ω en Ω.
Si combinamos estos hechos con (16), podemos ver que $g \in \mathcal{C}^1(V)$.
Así, queda completa la prueba.

■

Observación. El teorema de la función inversa establece que bajo ciertas condiciones, una función f tiene una inversa local alrededor de un punto. Una pregunta que nos podríamos hacer es ¿podemos asegurar la existencia de una inversa global?
La respuesta aún no la sabemos. Esto precisamente establece la *Conjetura del Jacobiano*,
Conjetura: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una función polinómica, es decir, las funciones coordenadas $f_1, \ldots f_n$, son polinomios en n variables $x_1, \ldots, x_n$. Si la característica de $\mathbb{K}$ es cero y el determinante del Jacobiano de f es constante y no nulo, entonces f tiene una inversa polinómica.

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del Teorema de la Función Inversa parte (a).

Teorema 3.2. *Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, sea $f : E \to \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(E)$. Si $f'(x)$ es invertible para cada $x \in E$, entonces $f(W)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ para cada conjunto abierto $W \subset E$.*

Nota. Cuando esto pasa se dice que f es un mapeo abierto de E en $\mathbb{R}^n$

Observación. En este teorema se asegura que cada punto $x \in E$ tiene una vecindad en la que f es inyectiva localmete en E, sin embargo f no necesariamente es inyectiva en todo E, como se puede apreciar el en siguiente ejemplo.

Ejemplo 10: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (e^x cos(y), e^x sen(y))$. Podemos demostrar que el Jacobiano de f diferente de cero en cada punto de $\mathbb{R}^2$, por lo que es inyectiva en una vecindad de cada punto, sin embargo f no es inyectiva globalmente. (ver en [1] *ejemplo 13, página 276*)

4. El Teorema de la Función Implícita

La primera aplicación que veremos del Teorema de la Función Inversa es en la demostración del Teorema de la Función Implícita.
Antes de enunciar el teorema veamos algo de notación. Sean $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $y =$

$(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. El vector $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$ será escrito como (x, y).
Sea $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$, A puede ser separada en dos transformaciones lineales, definidas por

$$A_x h = A(h, 0), \qquad A_y k = A(0, k)$$

para $h \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}^m$. Entonces $A_x \in L(\mathbb{R}^n)$ y $A_y \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ y

$$A(h, k) = A_x h + A_y k.$$

Primero enunciaremos la versión lineal del Teorema de la Función Implicita.

Teorema 4.1. *Sea $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$, si A_x es invertible, entonces a cada $k \in \mathbb{R}^m$ le corresponde un único $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $A(h, k) = 0$.*
A partir de k, se puede calcular h de la siguiente forma

$$h = -(A_x)^{-1} A_y k. \tag{17}$$

Demostración. Notemos que $A(h, k) = 0$ si, y solo si $A_x h + A_y k = 0$. De aquí que $A(h, k) = 0$ puede resolverse para h si k es conocida, es decir, h es una función lineal de k. ■

A continuación, enunciaremos el Teorema de la Función Implícita.

Teorema 4.2. *Sea f un mapeo $\mathcal{C}^1$ de un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ en $\mathbb{R}^n$, tal que $f(a, b) = 0$ para algún punto $(a, b) \in E$. Hacemos $A = f'(a, b)$ y supongamos que A_x es invertible. Entonces existen conjuntos abiertos $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ y $W \subset \mathbb{R}^m$, con $(a, b) \in U$ y $b \in W$, que tienen la siguiente propiedad:*
A cada $y \in W$ le corresponde un único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$(x, y) \in U \quad y \quad f(x, y) = 0. \tag{18}$$

Si esta x se define como $g(y)$, entonces g es un mapeo $\mathcal{C}^1$ de W en $\mathbb{R}^n$, $g(b) = a$,

$$f(g(y), y) = 0 \quad (y \in W), \tag{19}$$

y

$$g'(b) = -(A_x)^{-1} A_y. \tag{20}$$

Demostración. Se define F por medio de

$$F(x, y) = (f(x, y), y) \quad ((x, y) \in E). \tag{21}$$

Entonces F es un mapeo $\mathcal{C}^1$ de E en $\mathbb{R}^{n+m}$. Se pide que $f'(a, b)$ sea invertible.
Como $f(a, b) = 0$, se tiene que

$$f(a + h, b + k) = A(h, k) + r(h, k),$$

en donde r es el residuo que aparece en la definición de $f'(a, b)$. Debido a que

$$\begin{aligned} F(a + h, b + k) - F(a, b) &= (f(a + h, b + k), k) \\ &= (A(h, k), k) + (r(h, k), 0) \end{aligned}$$

se deduce que $F'(a, b)$ es el operador lineal sobre $\mathbb{R}^{n+m}$ que mapea (h, k) en $(A(h, k), k)$. Si este vector imagen es 0, entonces $A(h, k) = 0$ y $k = 0$, de aquí que $A(h, 0) = 0$. Del teorema 4.1 se sigue que $h = 0$. Además se deduce que $F'(a, b)$ es inyectiva, por lo tanto, invertible.

Así podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa a F. Entonces existen conjuntos abiertos U y V en $\mathbb{R}^{n+m}$, con $(a,b) \in U$, $(0,b) \in V$ tales que F es un mapeo inyectivo de U sobre V. Sea ahora W el conjunto de todos los $y \in \mathbb{R}^m$ tales que $(0,y) \in V$, notemos que $b \in W$. Notemos también que W es abierto, esto debido a que V es abierto.
Si $y \in W$, entonces $(0,y) = F(x,y)$ para algún $(x,y) \in U$. Por (21), $f(x,y) = 0$ para este x. Para el mismo y, supongamos que $(x',y) \in U$ y $f(x',y) = 0$. Entonces

$$F'(x',y) = (f(x',y),y) = (f(x,y),y) = F(x,y).$$

Como F es inyectiva en U, se sigue que $x' = x$. Esto prueba la primera parte del teorema.
Para la segunda parte, definimos $g(y)$, para $y \in W$, tal que $(g(y),y) \in U$ y $f(g(y),y) = 0$. Entonces

$$F(g(y),y) = (0,y) \qquad (y \in W). \tag{22}$$

Si G es el mapeo de V en U que invierte F, entonces $G \in \mathcal{C}^1$, por el Teorema de la Función Inversa y (22) tenemos que

$$(g(y),y) = G(0,y) \qquad (y \in W).$$

De este hecho y de que $G \in \mathcal{C}^1$ se sigue que $g \in \mathcal{C}^1$.
Finalmente, para calcular $g'(b)$, hacemos $(g(y),y) = \Phi(y)$. Entonces

$$\Phi'(y)k = (g'(y)k,k) \qquad (y \in W, k \in \mathbb{R}^m). \tag{23}$$

Así, $4f(\Phi(y)) = 0$ en W. La regla de la cadena muestra que

$$f'(\Phi(y))\Phi'(y) = 0.$$

Cuando $y = b$, entonces $\Phi(y) = (a,b)$, y $f'(\Phi(y)) = A$. Así

$$A\Phi'(b) = 0. \tag{24}$$

De (23) y (24) se sigue que

$$A_x g'(b)k + A_y k = A(g'(b)k,k) = A\Phi'(b)k = 0$$

para cada $k \in \mathbb{R}^m$. Así

$$A_x g'(b) + A_y = 0$$

■

5. La forma local de las inmersiones

Otra aplicación del Teorema de la Función Inversa es en la demostraciń de la forma local de las inmersiones. Antes de enunciar este teorema, daremos una definición y algunos ejemplos que pueden ser de gran ayuda.

Definición 5.1. Una *inmersión* de un abierto $U \in \mathbb{R}^n$, es una función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}^m$ tal que, para cada $x \in U$, la derivada $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal inyectiva. Evidentemente esto solo puede ocurrir cuando $n \leq m$.

Nota. Una función compuesta de dos inmersiones es también una inmersión.

Ejemplo 11: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Una curva diferenciable $f : I \to \mathbb{R}^n$ es una inmersión si, y solo si su vector velocidad es diferente de cero en cada punto $t \in I$. Esto quiere decir que en cada punto $f(t) \in \mathbb{R}^n$, $f(I)$ posee una recta tangente $L = \{f(t) + s \cdot f'(t) : s \in \mathbb{R}\}$. Como una inmersión puede no ser inyectiva, entonces cuando tomamos $f(t_1) = f(t_2)$, las rectas tangentes $L_1 = f(t_1) + \mathbb{R}f'(t_1)$ y $L_2 = f(t_2) + \mathbb{R}f'(t_2)$ pueden o no ser iguales.
Sin embargo, cuando consideramos una vecindad V de t_1, tan pequeña que ningún otro punto de V tenga la misma imagen que t_1, entonces L_1 será la única recta tangente en el punto $f(t_1)$.
Para ilustrar esto, consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(t) = (t^3 - t, t^2)$ (ver figura 2).

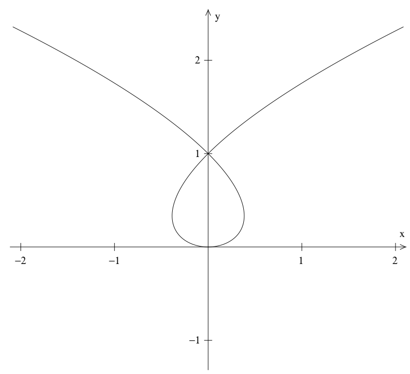


Figura 2: $f(t) = (t^3 - t, t^2)$

Notemos que para $t_1 = -1$ y $t_2 = 1$, $f(-1) = f(1)$ por lo que tenemos dos rectas tangentes en el punto $(0, 1)$. Sin embargo esto se arregla si tomamos un punto fijo, por ejemplo $t_1 = -1$ y tomamos una vecindad $V = (-2, 0)$. Ahora sí, la recta tangente es única en el punto $(0, 1)$ (ver figura 3).

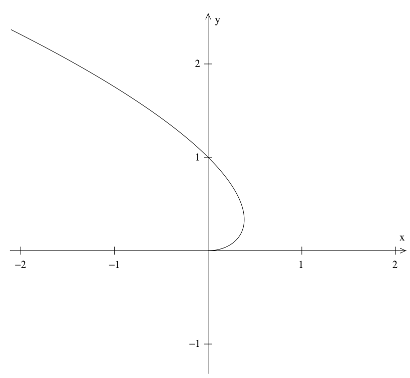
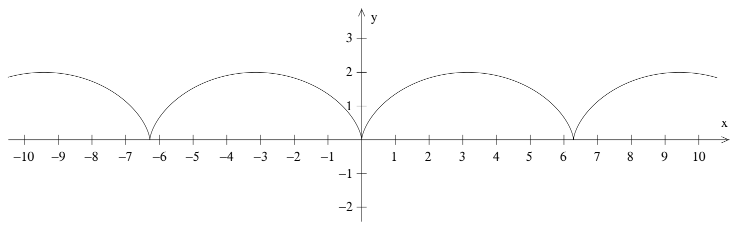


Figura 3: $f(t) = (t^3 - t, t^2)$, $-2 \leq t \leq 0$

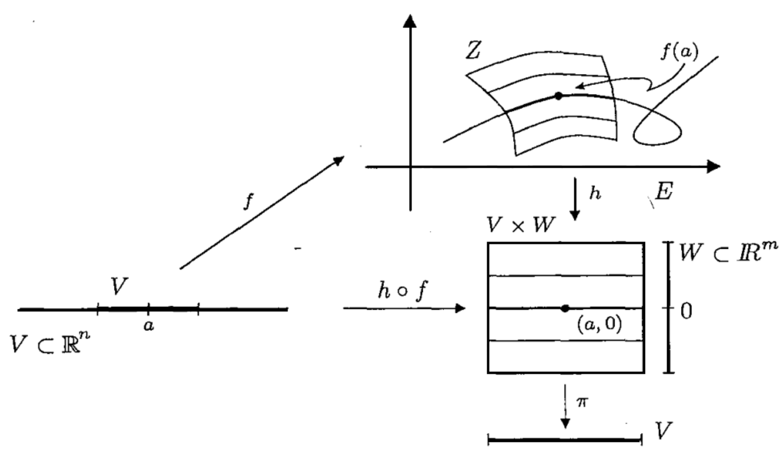
Ejemplo 12: Ahora consideremos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(t) = (t - sent, 1 - cost)$. Notemos que g es inyectiva, mas no es una inmersión, esto debido a que posee una infinidad de puntos donde su vector velocidad $g'(t)$ es cero.



A continuación, enunciaremos la forma local de las inmersiones.

Teorema 5.2. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, sea $f : U \to \mathbb{R}^{n+m}$ fuertemente diferenciable en un punto $a \in U$. Si la derivada $f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ es inyectiva, existe un homeomorfismo $h : Z \to V \times W$, de un abierto $Z \ni f(a)$ en $\mathbb{R}^{n+m}$ sobre un abierto $V \times W \ni (a, 0)$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, tal que $hf(x) = (x, 0)$ para toda $x \in V$ y h es fuertemente diferenciable en un punto $f(a)$.*

La siguiente imagen ilustra el teorema anterior y ayuda a su mejor comprensión.



6. La forma local de las submersiones

Por último, otra aplicacií del Teorema de la Función Inversa es en la demostración de la forma local de las submersiones. Antes de enunciar este teorema habrá que dar una pequeña definición.

Definición 6.1. Una función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}^m$, definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ se llama una *submersión* cuando para todo $x \in U$, su derivada $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal sobreyectiva. Para que esto ocurra, es necesario que se tenga $n \geq m$.

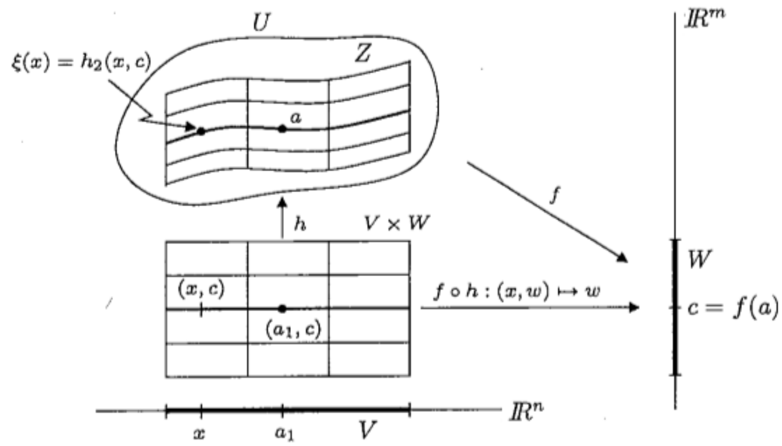
Observación. Un funcional lineal es sobreyectivo o es nulo. Por lo tanto, una función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}$ es una submersión si y solamente si, $df(x) \neq 0$, o equivalentemente $grad\ f(x) \neq 0$, para todo $x \in U$.

Nota. Una aplicación compuesta de dos submersiones, es también una submersión.

Teorema 6.2. *Sea $U \subset \mathbb{R}^{n|m}$ un conjunto abierto, sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ fuertemente diferenciable en un punto $a \in U$. Si $f'(a) : \mathbb{R}^{n|m} \to \mathbb{R}^m$ es sobreyectiva o, más precisamente, si es una descomposición dada en suma directa de tipo $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ tal que $a = (a_1, a_2)$ y la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial a_2}(a) = f'(a)|\mathbb{R}^m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo, entonces existen abiertos*

V, W, Z, con $a \in Z \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $a_1 \in V \subset \mathbb{R}^n$, $f(a) \in W \subset \mathbb{R}^m$, y un homeomorfismo $h : V \times W \to Z$, fuertemente diferenciable en un punto $(a_1, f(a))$, tal que $fh(x,w) = w$ para todo $(x,w) \in V \times W$.

La siguiente imagen ilustra el teorema anterior y ayuda a su mejor comprensión.



Referencias

[1] E.L. Lima, *Curso de análise volume 2*, décimo primera edición, Rio de Janeiro : IMPA, 2009.

[2] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, tercera edición, McGraw-Hill.

[3] F.E. Torres, *Acerca de la conjetura del Jacobiano*, Pro Mathematica: Vol.V, Nos. 9-10,1991.

¿Cómo ayuda el Teorema de la Función Inversa a sus amigos, el Teorema de la Función Implícita, las Inmersiones y Submersiones?

Itzia Iztlacihuatl Justo Robledo
Asesor: Otoniel Nogueira da Silva

Agosto 1, 2019

Introducción

El teorema de la función inversa tiene múltiples aplicaciones, En esta presentación hablaremos de su aplicación para demostrar el teorema de la función implícita, la forma local de las inmersiones y la forma local de las submersiones.
Antes de enunciar estos teoremas daremos algunos conceptos preliminares.

Diferenciación

Definición

Sean E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$ y $x \in E$. Si existe una transformación lineal $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = 0,$$

entonces decimos que f es diferenciable en x y además $f'(x) = A$.

Nota: Si f es diferenciable en cada $x \in E$, entonces decimos que f es *diferenciable* en E.

Teorema (Regla de la cadena)

Sean E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que f es diferenciable en $x_0 \in E$, sea $g : D \subset f(E) \to \mathbb{R}^k$, donde D es un subconjunto abierto de $f(E)$ y g es diferenciable en $f(x_0)$. Entonces $F : E \to \mathbb{R}^k$ definida por

$$F(x) = g(f(x))$$

es diferenciable en x_0 y

$$F'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Derivadas parciales

Definición

Sean E un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : E \to \mathbb{R}^m$. Para $x \in E$, $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, definimos la derivada parcial de f_i con respecto x_j como

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t}.$$

Teorema

Supongamos que f mapea un conjunto abierto convexo $E \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, f es diferenciable en E, y hay un número real M tal que

$$\|f'(x)\| \leq M$$

para cada $x \in E$. Entonces

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

para toda $a \in E, b \in E$.

Nota: Si una función f cumple con lo establecido en este teorema, entonces se dice que f es una *función lipschitziana* o que f cumple una condición de Lipschitz.

Principio de contracción

Definición

Sea X *un espacio métrico con métrica* d. *Si* $\varphi : X \to X$ *y si existe un número* $0 \leq c < 1$ *tal que*

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x, y)$$

para toda $x, y \in X$, *entonces se dice que* φ *es una contracción de* X *en* X.

Teorema

Si X *es un espacio métrico completo y si* φ *es una contracción de* X *en* X, *entonces existe un único punto fijo* $x \in X$ *tal que* $\varphi(x) = x$.

Teorema de la función inversa

Teorema (Teorema de la Función Inversa)

Suponga que $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *donde* E *es abierto,* $f \in \mathcal{C}^1(E)$, $f'(a)$ *es invertible para algún* $a \in E$ *y* $b = f(a)$. *Entonces*

(A) *Existen conjuntos abiertos* U *y* V *en* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $a \in U$, $b \in V$, f *es inyectiva en* U *y* $f(U) = V$;

(B) *si* $g : V \to U$ *es la inversa de* $f : U \to V$ *(la cual existe por el inciso (a)), definida en* V *por*

$$g(f(x)) = x \qquad (x \in U),$$

entonces $g \in \mathcal{C}^1(V)$.

Teorema de la función implícita

Teorema

Sea f un mapeo $\mathcal{C}^1$ de un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ en $\mathbb{R}^n$, tal que $f(a,b) = 0$ para algún punto $(a,b) \in E$. Hacemos $A = f'(a,b)$ y supongamos que A_x es invertible. Entonces existen conjuntos abiertos $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ y $W \subset \mathbb{R}^m$, con $(a,b) \in U$ y $b \in W$, que tienen la siguiente propiedad:

A cada $y \in W$ le corresponde un único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$(x,y) \in U \quad y \quad f(x,y) = 0.$$

Si esta x se define como $g(y)$, entonces g es un mapeo $\mathcal{C}^1$ de W en $\mathbb{R}^n$, $g(b) = a$,

$$f(g(y),y) = 0 \quad (y \in W),$$

y

$$g'(b) = -(A_x)^{-1}A_y.$$

La forma local de las inmersiones

Definición

Una inmersión de un abierto $U \in \mathbb{R}^n$, es una aplicación"diferenciable $f : U \to \mathbb{R}^m$ tal que, para cada $x \in U$, la derivada $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal inyectiva. Evidentemente esto solo puede ocurrir cuando $n \leq m$.

Teorema (Forma local de las inmersiones)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, sea $f : U \to \mathbb{R}^{n+m}$ fuertemente diferenciable en un punto $a \in U$. Si la derivada $f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ es inyectiva, existe un homeomorfismo $h : Z \to V \times W$, de un abierto $Z \ni f(a)$ en $\mathbb{R}^{n+m}$ sobre un abierto $V \times W \ni (a, 0)$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, tal que $hf(x) = (x, 0)$ para toda $x \in V$ y h es fuertemente diferenciable en un punto $f(a)$.

La forma local de las submersiones

Definición

Una aplicación diferenciable $f : U \to \mathbb{R}^m$, definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ se llama una submersión cuando para todo $x \in U$, su derivada $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal sobreyectiva. Para que esto ocurra, es necesario que se tenga $n \geq m$.

Teorema (Forma local de las submersiones)

Sea $U \subset \mathbb{R}^{n|m}$ un conjunto abierto, sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ fuertemente diferenciable en un punto $a \in U$. Si $f'(a) : \mathbb{R}^{n|m} \to \mathbb{R}^m$ es sobreyectiva o, más precisamente, si es una descomposición dada en suma directa de tipo $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ tal que $a = (a_1, a_2)$ y la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial a_2}(a) = f'(a)|\mathbb{R}^m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo, entonces existen abiertos V, W, Z, con $a \in Z \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $a_1 \in V \subset \mathbb{R}^n$, $f(a) \in W \subset \mathbb{R}^m$, y un homeomorfismo $h : V \times W \to Z$, fuertemente diferenciable en un punto $(a_1, f(a))$, tal que $fh(x, w) = w$ para todo $(x, w) \in V \times W$.

Referencias

W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, tercera edición, McGraw-Hill.

E.L. Lima, *Curso de análise volume 2*, décimo primera edición, Rio de Janeiro : IMPA, 2009.