Renormalización y autosimilitud en el conjunto de Mandelbrot

Jonathan Galván Bermúdez

Universidad de Guanajuato

30 de julio de 2019

Resumen

Una de las propiedades interesantes de el conjunto de Mandelbrot es que dentro de él podemos encontrar copias pequeñas de sí mismo. Para explicar este fenómeno se usa la teoría de renormalización compleja y de funciones de tipo polinomial. En este trabajo damos una breve introducción a esta teoría y una explicación para el fenómeno de autosimilitud mencionado.

Conjunto de Mandelbrot, Renormalización, Dinámica holomorfa, Espacio de parámetros

1. La familia cuadrática y el conjunto de Mandelbrot

Consideremos al conjunto $\mathcal{Q} = \{f_c(z) = z^2 + c : c \in \mathbb{C}\}$, se puede probar que todo polinomio cuadrático aparece dinámicamente (salvo conjugación) una única vez en este conjunto. A este conjunto le llamamos la familia cuadrática. Cada elemento de $\mathcal{Q}$ tiene un único punto crítico en $z = 0$ y dos puntos fijos finitos contando multiplicidad.
Una propiedad dinámica de los polinomios es que el punto al infinito es un punto fijo superatractor, al complemento de la cuenca de atracción del punto al infinito le llamamos el conjunto de Julia lleno (figuras 1 y 2) y su frontera es el conjunto de Julia (esta definición de el mismo conjunto que la definicin clsica). Para un polinomio f denotamos los conjuntos anteriores por $K(f)$ y $J(f)$ respectivamente. Notemos que el conjunto de Julia lleno es compacto y lleno en el sentido en que $\hat{\mathbb{C}} \setminus K(f)$ es conexo.

Una consecuencia de que el infinito sea un punto fijo superatractor es que tenemos un modelo dinámico preciso de cualquier polinomio cuadrático cerca de infinito: Todo polinomio cuadrático f_c es conformemente conjugado a $z \mapsto z^2$ en una vecindad de infinito.
La función que da la conjugación es llamada coordenada de Böttcher y se denota por $B_c(z)$. En el caso en que $K(f)$ es conexo podemos extender analíticamente la coordenada a una función univalente $B_c : \hat{\mathbb{C}} \setminus K(f_c) \to \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$. Por medio de esta función las foliaciones invariantes de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ dadas por círculos y por rayos que pasan por el origen inducen foliaciones invariantes en $\hat{\mathbb{C}} \setminus K(f)$.

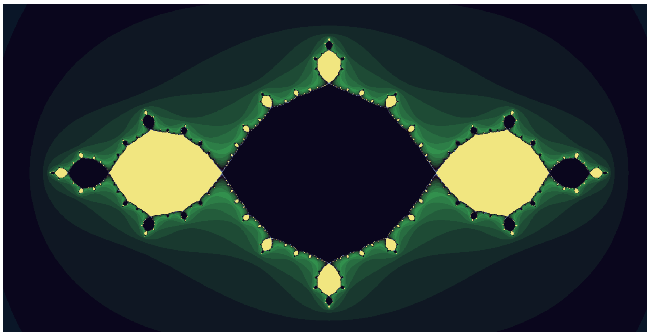

Figura 1: Conjunto de Julia lleno para $z \mapsto z^2 - 1$ llamado la basilica

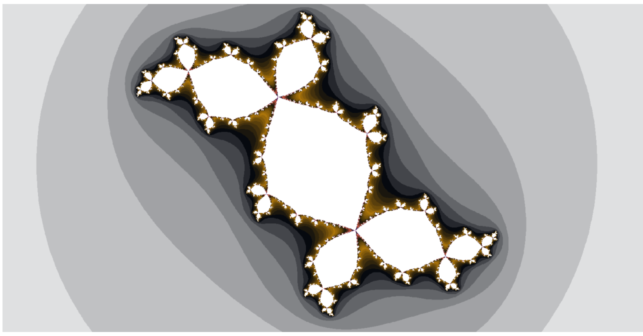

Figura 2: Conjunto de Julia lleno llamado el conejo de Douady

Las hojas de estas foliaciones inducidas son llamadas equipotenciales y rayos externos respectivamente y están determinadas por sus radios o sus ángulos en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ respectivamente. Bajo la dinámica tenemos que un rayo de ángulo θ es enviado a un rayo de ángulo 2θ mod 1 y un equipotencial de radio r a un equipotencial de radio r^2.

Si el conjunto lleno de Julia es localmente conexo por el teorema de Caratheodory tenemos que todos los rayos externos aterrizan en algún punto de $K(f)$, esto no siempre pasa, sin embargo, si el conjunto de Julia es conexo siempre hay rayos externos que aterrizan: Si el conjunto de Julia de f es conexo entonces todos los rayos externos de ángulo racional aterrizan en algún punto parabólico o repulsor del conjunto de Julia. Más aún, los ángulos racionales con denominador impar aterrizan en puntos periódicos y los de denominador par en puntos preperiódicos y viceversa en todo punto periódico parabólico o repulsor aterriza al menos un rayo externo (y a lo más un número finito) y un enunciado similar se cumple para puntos preperiódicos y denominadores pares.

Los polinomios cuadráticos tienen dos puntos fijos contando multiplicidad, el punto fijo sobre el que aterriza el rayo externo de ángulo cero es llamado punto fijo β y el punto fijo que resta es llamado punto fijo α. Notemos que $\alpha = \beta$ si y sólo si $c = \frac{1}{4}$.

De manera natural podemos identificar a $\mathcal{Q}$ con $\mathbb{C}$ a través de $f_c \mapsto c$ por lo que el espacio de parámetros de la familia cuadrática es precisamente el plano complejo. Para los elementos de la familia cuadrática se tiene la dicotomía de si la órbita del punto crítico está en la cuenca de atracción del infinito o no, motivados por esta partición del espacio de parámetros definimos el conjunto de Mandelbrot:

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : f_c^n(0) \not\to \infty\}.$$

Más aún, si la órbita del punto crítico no escapa al infinito tomemos una R suficientemente grande para que el conjunto $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_R$ sea f-invariante. Sus imágenes inversas bajo f son simplemente conexas pues el único punto de ramificación finito de f es $0 \in K(f)$. De esta manera notando que la cuenca de atracción del infinito es la unión de esos discos topológicos tenemos que $K(f)$ debe ser conexo. Si el punto crítico escapa entonces alguna de las preimágenes se ramifica y al tomar la unión de todas las preimágenes tendremos un conjunto de Cantor. Por la discusión anterior podemos definir equivalentemente al conjunto de Mandelbrot como

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : K(f_c) \text{ es conexo }\}.$$

Análogamente al caso del plano dinámico, en el caso del plano de parámetros también podemos definir rayos externos paramétricos y equipotenciales paramétricos (cuando sea claro de qué tipo de objeto hablamos omitiremos usar paramétrico o dinámico). En este caso las foliaciones invariantes que mencionamos inducen los rayos y equipotenciales en el plano paramétrico a través de $c \mapsto B_c(c)$.

Si un elemento de $\mathcal{Q}$ tiene un ciclo atractor finito decimos que es hiperbólico y es sabido que en ese caso el punto crítico es atraído al ciclo atractor finito por lo que los parámetros hiperbólicos pertenecen a $\mathcal{M}$. La existencia de este ciclo es una condición abierta por lo que de hecho los parámetros hiperbólicos están contenidos en $int(\mathcal{M})$ y decimos que una componente conexa de $int(\mathcal{M})$ es hiperbólica si contiene algún parámetro hiperbólico.
Dada una componente hiperbólica H la función $c \mapsto \lambda(c)$ que a c le asigna el multiplicador de su ciclo atractor es holomorfa por el teorema de la función implícita y es un isomorfismo conforme con $\mathbb{D}$ y se extiende continuamente a la frontera de H que es enviada a $\partial\mathbb{D}$. Por lo anterior, existe un parámetro c_0 que es enviado a 0 y un parámetro c_1 que es enviado a 1 y son llamados el centro y la raíz de H, respectivamente.

El conjunto de Mandelbrot es también el diagrama de bifurcación de la familia cuadrática. La componente H_0 que contiene a cero es el conjunto de parámetros para los cuales f_c tiene un punto fijo atractor y en los puntos de aterrizaje de rayos externos de periodo k encontramos un punto de bifurcación donde se tiene un ciclo parabólico de periodo k y pegada en ese punto está una componente cuyos parámetros tienen un ciclo atractor de periodo k. Este fenómeno se repite si iniciamos en cualquier componente hiperbólica H. Si H' es una componente obtenida a partir de un punto de bifurcación de una componente H decimos que H' es satélite (de H). Si una componente no proviene de una construcción así decimos que es primitiva.

Un fenómeno que sucede en la representación gráfica de $\mathcal{M}$ es que podemos encontrar copias que son visualmente indistinguibles de el conjunto original y más adelante veremos que de hecho se originan en componentes hiperbólicas primitivas. Para explicar esto haremos uso de la teoría de renormalización y para esto es necesario que consideremos una clase de funciones más grande que la familia cuadrática.

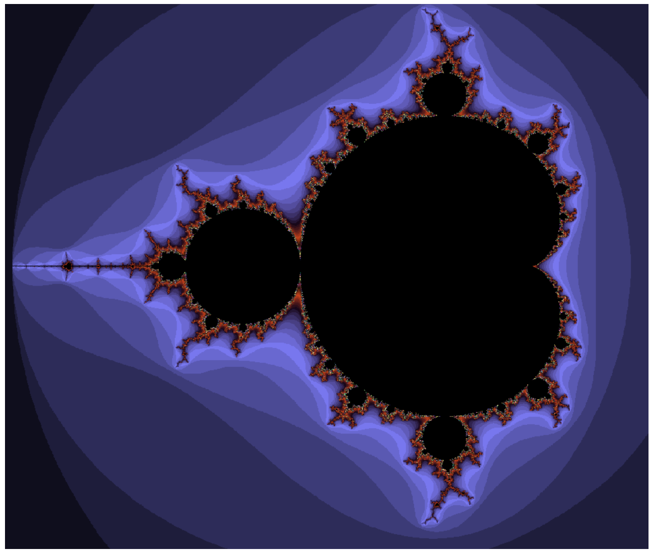

Figura 3: Conjunto de Mandelbrot

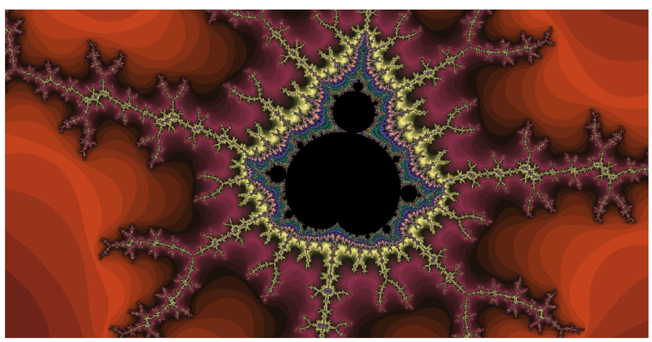

Figura 4: Copia pequeña del conjunto de Mandelbrot en sí mismo

2. Aplicaciones tipo cuadrático

Consideremos U y U' dos discos topológicos en $\mathbb{C}$ de manera que $\overline{U} \subset U'$. Si $f : U \to U'$ es una cubriente ramificada holomorfa de grado 2 decimos que la terna (f, U, U') es una aplicación de tipo cuadrático. (en general omitiremos los conjuntos al hablar de aplicaciones tipo cuadrático). Normalizaremos los dominios U y U' para poner el punto crítico de f en el origen. Al espacio de aplicaciones de tipo cuadrático la denotaremos por $\mathcal{QL}$ Definimos el conjunto de Julia lleno de f como

$$K(f) = \{z \in U : f^n(z) \in U, n \in \mathbb{N}\}$$

y el conjunto de Julia $J(f)$ es la frontera de $K(f)$. Como ejemplo, dado $f_c \in \mathcal{Q}$ para un disco V suficientemente grande $f : f^{-1}(V) \to V$ es una aplicación de tipo cuadrático.

De manera análoga al caso de $\mathcal{Q}$, para una aplicación de tipo polinomial también se tienen dos opciones, el conjunto de Julia lleno es conexo o bien es un conjunto de Cantor.

Cuando hablamos de que dos funciones tienen las mismas propiedades dinámicas generalmente nos referimos a que existe una equivalencia topológica, es decir, son conjugadas por un homeomorfismo, cuando hablamos de que dos funciones holomorfas tienen las mismas propiedádes geométricas nos referimos a que existe una equivalencia conforme, es decir, son conjugadas por un isomorfismo conforme (biholomorfismo). Este último tipo de equivalencia es muy rígida y muchas veces es difícil de conseguir, es por ello que introducimos una noción de equivalencia más fuerte que la topológica pero menos restrictiva que la equivalencia conforme.
Decimos que un homeomorfismo $h : U \to V$ entre abiertos de $\mathbb{C}$ es K-cuasiconforme si tiene derivadas en el sentido de distribuciones y además $|\overline{\partial} h| \leq K|\partial h|$ para casi toda $z \in U$.
Naturalmente, un homeomorfismo cuasiconforme induce un nuevo tipo de equivalencia en el espacio de aplicaciones de tipo cuadrático. De hecho consideraremos un refinamiento de esta definición. Sean f y g dos aplicaciones de tipo cuadrático diremos que f y g son híbridamente equivalentes si f y g son conjugadas por una función h que es cuasiconforme y que cumple $\overline{\partial} h(z) = 0$ en casi todo punto de $K(f)$ (por el lema de Weyl h es conforme en $intK(f)$).
Esta relación de equivalencia divide a $\mathcal{QP}$ en clases de equivalencia híbridas. El teorema de enderezamiento pobrado por Douady y Hubbard nos dice que existe un polinomio cuadrático en cada clase híbrida. Esto nos induce una función $\chi : \mathcal{QP} \to \mathbb{C}$ con $\chi(f) = c$ de manera que f es híbridamente equivalente a f_c. Más aún, si $K(f)$ es conexo entonces la c es única. Si f tiene conjunto de Julia conexo decimos que $f_{\chi(f)} = f_c$, $c \in \mathcal{M}$ es el enderezamiento de f.

3. Renormalización

La razón principal por la que queremos estudiar aplicaciones de tipo cuadrático viene de la teoría de renormalización que introduciremos en esta sección.

Una aplicación de tipo cuadrático $f : U \to U'$ es renormalizable de periodo p si

- Existe un disco topológico $V \ni 0$ tal que los dominios $f^i(V)$ están contenidos en U para $i = 0, \ldots, p-1$. Y $g = f^p : V \to f^p(V)$ es de tipo cuadrático.
- El conjunto de Julia lleno, $K(g)$ es conexo.
- Los pequeños conjuntos de Julia llenos, $K_i = f^i(K(g))$, $i = 0, \ldots, p-1$ no se intersecan o se intersecan solo en el punto fijo de g donde aterrice el rayo externo de ángulo cero.

Llamamos a g la renormalización de periodo p de f. Si los pequeños conjuntos de Julia llenos no se intersecan a esta renormalización se llama primitiva. Si se intersecan se llama satélite.
Si f tiene un ciclo repulsor de periodo p que es punto fijo α de f^p entonces se puede mostrar que $g = f^p$ restringido a dominios adecuados es renormalizable siempre que $K(g)$ sea conexo. Más aún en el caso parabólico esto siempre se puede hacer cuando los pequeños conjuntos de Julia llenos son disjuntos (caso primitivo) y además en el caso satélite se sabe que no se puede renormalizar.

También se puede probar que si f es hiperbólica y tiene un ciclo atractor de periodo p entonces f es renormalizable con periodo p y la renormalización g tiene un punto fijo atractor.

El obtener una renormalización de una aplicación de tipo cuadrático f nos permite entender el comportamiento dinámico de una iterada alta de f (que ya no es de tipo cuadrático) a través de restringirnos a un dominio adecuado, de hecho, resultará que este comportamiento nos es conocido y tenemos herramientas para estudiarlo pues la restricción será de tipo cuadrático.

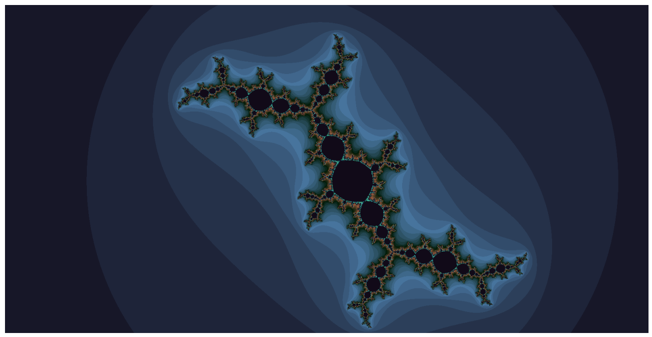

Figura 5: Conjunto de Julia en una componente hiperbólica de grado 6. Es renormalizable de periodo 3. Podemos ver que la renormalización es satélite pues los pequeños conjuntos de Julia se tocan en un punto fijo.

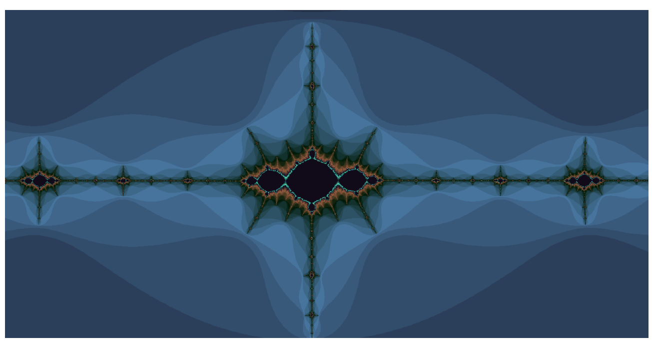

Figura 6: Conjunto de Julia en una componente hiperbólica de grado 6. Es renormalizable de periodo 3. Podemos ver que la renormalización es primitiva pues los pequeños conjuntos de Julia no se tocan.

4. Familias de tipo cuadrático y copias de $\mathcal{M}$

Grosso modo, la razón por la que aparecen pequeñas copias de $\mathcal{M}$ en sí mismo es que existen *ventanas* donde f_c es renormalizable para cada c y la imagen bajo el enderezamiento de la familia dada por considerar todas estas renormalizaciones es precisamente el conjunto de Mandelbrot, más aún, χ es un homeomorfismo de esta ventana en $\mathcal{M}$.
Para explicar matemáticamente este fenómeno introduciremos ahora la teoría de familias cuadráticas y usaremos la teoría desarrollada en la sección anterior.

Sea $\Lambda \subset \mathbb{C}$ una región. Una famialia de tipo cuadrático $\mathbf{g}$ sobre Λ es una familia de aplicaciones de tipo cuadrático $g_\lambda : U_\lambda \to U'_\lambda$ tal que:

- El conjunto $\mathbb{U} = \{(\lambda, z) : \lambda \in \lambda, z \in U_\lambda\}$ es una región en $\mathbb{C}^2$.
- $g_\lambda(z)$ es holomorfa con respecto a ambas variables en $\mathbb{U}$.

Diremos que $\mathbf{g}$ se extiende fuera de $\mathbb{U}$ si existe Λ' con $\Lambda \Subset \Lambda'$ y una familia de tipo cuadrático G_λ sobre Λ' de manera que para su restricción a Λ, $\mathbf{g}$ sea un ajuste.
Decimos que $\mathbf{g}$ es propia si:

- $\mathbf{g}$ admite extensión fuera de $\mathbb{U}$.
- $g_\lambda(0) \in \partial U'$ para $\lambda \in \partial\Lambda$.

De el segundo requerimiento es obvio que $g_\lambda(0) \neq 0$ para $\lambda \in \Lambda$. Tenemos entonces un índice de la curva $\lambda \mapsto g_\lambda(0)$ bien definido. A este número le llamamos el índice de $\mathbf{g}$ y lo denotamos por $w(\mathbf{g})$. Una familia propia $\mathbf{g}$ está desplegada si $w(\mathbf{g}) = 1$. En este caso, el principio del argumento nos dice que existe un único punto λ_0 en Λ tal que $g_{\lambda 0}(0) = 0$, i.e., tal que g_{λ_0} tiene un punto fijo superatractor, escogeremos a este punto como punto base de Λ.
Queremos también que el dominio de las funciones de nuestra familia se muevan holomorfamente respecto a Λ, para esto, definimos el anillo fundamental $A_\lambda := \overline{U'} \setminus U$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y suponemos que existe un movimiento holomorfo $h : A_{\lambda_0} \to A_\lambda$ tal que

$$h_\lambda(g_{\lambda_0}(z)) = g_\lambda(h_\lambda(z)), \quad z \in \partial U_{\lambda_0}.$$

Esto es, h es equivariante pues si estamos en la frontera interior de $U_{\lambda 0}$ es equivalente moverse con la función correspondiente y luego ir al anillo correspondiente que ir al anillo y luego moverse con la función.
Supondremos además que el movimiento de cualquier compacto contenido en $\overline{U'_{\lambda_0}} \setminus \overline{U_{\lambda_0}}$ se extiende a un disco que contenga compactamente a Λ.
Si existe esta h diremos que $\mathbf{g}$ está equipada (con h). Un homeomorfismo que preserva orientación y que conjuga la acción de g sobre $\partial U_{\lambda 0}$ a la acción de $z \mapsto z^2$ en el anillo $\mathbb{A}[r, r^2]$ es llamado un entubamiento de g. Dada la elección de un entubamiento T_{λ_0} para g_{λ_0}, naturalmente podemos tomar $T_\lambda = T_{\lambda_0} \circ h_\lambda^{-1}$. Estos son entubamientos pues h es un movimiento holomorfo equivariante.

El conjunto de Mandelbrot asociado a esta familia se define de manera análoga a la definición para la familia $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{M}(\mathbf{g}) = \{\lambda \in \Lambda : K(g_\lambda) \text{ es conexo}\}.$$

Si la familia $\mathbf{g}$ es propia, se puede mostrar que $K(g_\lambda)$ es un conjunto de Cantor para $\lambda \in \partial\Lambda$ por lo que $\mathcal{M}(\mathbf{g}) \Subset \Lambda$.

De hecho, la familia cuadrática $\mathcal{Q}$ no es exactamente una familia de tipo cuadrática con todas las propiedades que mencionamos, sin embargo, sí podemos encontrar una subfamilia de $\mathcal{Q}$ que cumpla todo lo anterior.
Fijemos un $r > 1$ y consideremos Σ el dominio acotado por la curva equipotencial de radio r^2 en el espacio de parámetros. Para $c \in \Sigma$ resulta que f_c es una aplicación de tipo cuadrático con

dominio la región acotada por el equipotencial de radio r en el plano dinámico. Esta familia es propia pues podemos extender nuestro $\Lambda = \Sigma$ al tomar un $r' > r$, la segunda propiedad es clara pues si $c \in \partial\Sigma$ entonces $B_c(c) = r^2$ y entonces $f_c(0) = c$ está en la curva de equipotencial r^2. Cuando hacemos moverse c alrededor de la curva de equipotencial r^2 tenemos que c da una vuelta alrededor de 0 en el plano dinámico por lo que el índice de esta familia es 1 y entonces está desplegada.
La coordenada de Bötcher inversa, B_c^{-1} es el movimiento holomorfo de los anillos fundamentales con $\mathbb{A}[r, r^2]$ el anillo base. Notemos también que si tomamos cualquier anillo ligeramente más pequeño, la coordenada de Bötcher se extiende a un dominio ligeramente más grande.
Así, la familia cuadrática restringida a Σ es una familia de tipo cuadrática propia, desplegada y equipada.

Veremos ahora que dada una familia de tipo cuadrático $\mathbf{g}$ sobre Λ con las tres propiedades anteriores la función $\chi : \Lambda \to \Sigma$ (el enderezamiento de $\mathcal{M}(\mathbf{g})$) es un homeomorfismo que envía $\mathcal{M}(\mathbf{g})$ en $\mathcal{M}$. Por cuestiones de espacion daremos solo las ideas principales de la prueba, la prueba completa puede ser consultada en [1] y un resumen similar puede ser consultado en [2].

Primero notamos que la curva $\lambda \mapsto g_\lambda(0)$ atraviesa cada hoja de h en un único punto y de forma transversal. Usando este resultado y que la familia es propia, se procede a construir una uniformización $\Psi_{\mathbf{g}} : \Lambda \setminus \mathcal{M}(\mathbf{g}) \to \mathbb{A}(1, r^2)$ que, de hecho, está dada por $\Psi_{\mathbf{g}}(\lambda) = T_\lambda(g_\lambda(0))$, es decir, por el entubamiento del valor crítico de cada g_λ.
Consideramos ahora las uniformizaciones $\Psi_{\mathcal{M}} : \Sigma \setminus \mathcal{M} \to \mathbb{A}(1, r^2)$ y $\Psi_{\mathcal{M}(\mathbf{g})} : \Lambda \setminus \mathcal{M}(\mathbf{g}) \to \mathbb{A}(1, r^2)$. Tenemos que si $c = \chi(\lambda) \in \Sigma \setminus \mathcal{M}$ entonces usando resultados sobre entubamientos en el caso de Cantor tenemos $\Psi_{\mathcal{M}}(c) = B_c(c) = T_\lambda(g_\lambda(0)) = \Psi_{\mathbf{g}}(\lambda)$. Así, $\chi = \Psi_{\mathcal{M}}^{-1} \circ \Psi_{\mathbf{g}}$ y como es composición de homeomorfismos entonces χ es un homeomorfismo fuera de $\mathcal{M}(\mathbf{g})$. Si el entubamiento T_{λ_0} y el movimiento holomorfo h son tomados K-cuasiconformes entonces χ también es K-cuasiconforme.

Se prueba después que χ se extiende continuamente a la frontera de $\mathcal{M}(\mathbf{g})$ y que si $\lambda \in \partial\mathcal{M}(\mathbf{g})$ entonces $\chi(\lambda) \in \partial\mathcal{M}$. Para esto se usa teoría clásica de movimientos holomorfos y la rigidez de las clases de equivalencia cuasiconforme.
El teorema de enderezamiento es válido para aplicaciones de tipo polinomial de cualquier grado pero solo en el caso cuadrático el enderezamiento es continuo. Esto se debe, como ya se dijo, a la rigidez de la equivalencia cuasiconforme en $\partial\mathcal{M}$.

Una componente de $int(\mathcal{M}(\mathbf{g}))$ es hiperbólica si contiene algún parámetro hiperbólico. Como el enderezamiento de una función con ciclo atractor (función hiperbólica) también tiene un ciclo atractor entonces es hiperbólico (la conjugación es conforme en el conjunto de Julia lleno) entonces podemos asegurar que el enderezamiento de la componente está contenido en alguna componente interior de $\mathcal{M}$. Consideremos las funciones multiplicador de la componente Q de $int(\mathcal{M}(\mathbf{g}))$ y H de $\mathcal{M}$, sabemos por el teorema de la función implicita que son holomorfas, ambas son isomorfismos conformes sobre $\mathbb{D}$ y se extienden continuamente a la frontera, si las denotamos por ρ_Q y ρ_H respectivamente tenemos que $\chi = \rho_H^{-1} \circ \rho_Q$ por lo que en la componente Q, χ es holomorfa y propia. Resulta también que este resultado es cierto para componentes que no son hiperbólicas, sin embargo, la prueba es bastante más complicada y se basa en la teoría de movimientos holomorfos y aplicaciones cuasiconformes.

Lo siguiente que se quiere mostrar es que las fibras $\chi(c)$ para $c \in \mathcal{M}$ son finitas, de hecho se quiere llegar a que las fibras tengan cardinalidad 1. Como $\mathcal{M}(\mathbf{g})$ es compacto, basta ver que las fibras son discretas.
Una vez probado lo anterior solo resta ver que $\chi : \mathcal{M}(\mathbf{g}) \to \mathcal{M}$ es biyectiva. Usando teoría de aplicaciones topológicamente holomorfas (ver [3]) particularmente la versión topológica del principio del argumento se prueba lo buscado.

De probarse lo anterior tendremos que $\chi : \Lambda \to \Sigma$ es un homeomorfismo que además manda $\mathcal{M}(\mathbf{g})$ homeomorfamente sobre $\mathcal{M}$. Por lo tanto, cada vez que tengamos una familia de tipo cuadrática propia, desplegada y equipada tendremos una copia homeomorfa del conjunto de Mandelbrot.

Hasta ahora hemos visto que dada una familia con las propiedades adecuadas, sta produce una copia de $\mathcal{M}$, pero, cómo explicamos las copias que ya sabemos que aparecen en $\mathcal{M}$? Es aquí donde utilizaremos la teoría de renormalización.

Dada una copia $\mathcal{M}_0$ del conjunto de Mandelbrot $\mathcal{M}$ tenemos que su cardioide principal es una componente primitiva de $\mathcal{M}$ y tiene un centro c_0 y una raíz c_1. Supongamos que c_0 tiene periodo p. Sabemos que sobre c_1 aterrizan dos rayos externos de ángulos θ_1 y θ_2. A la región delimitada por estos dos rayos, el equipotencial de radio η ($\eta > 1$ fijo, como es mayor que 1 entonces contiene a $\mathcal{M}(\mathbf{g})$) y que contiene a c_0 le llamamos Λ_1.

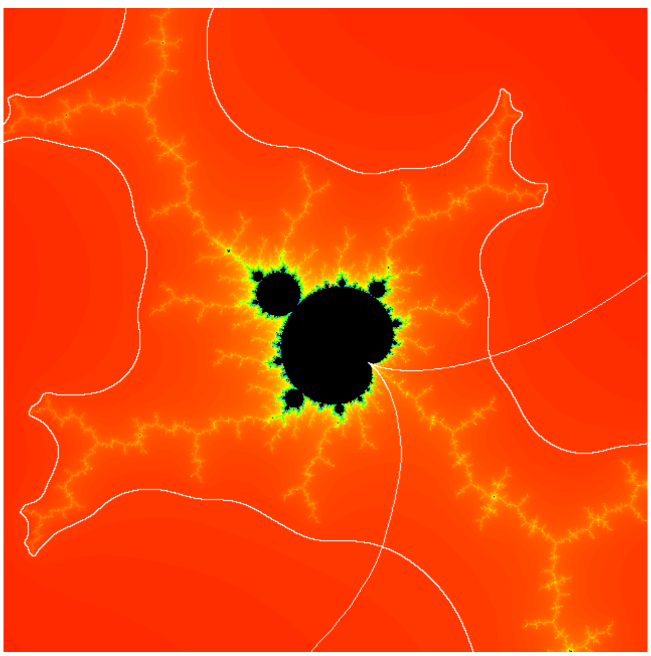

Figura 7: Región Λ_1 acotada por equipotencial y rayos que aterrizan en la raíz.

Resulta que todos los parámetros c en Λ_1 tales que $K(f_c^p)$ es conexo son renormalizables de periodo p y más aún, los discos topológicos U_c y U_c' (y por lo tanto los anillos fundamentales) también se mueven holomorfamente y de hecho con la coordenada de Bötcher. Los parámetros para los cuales $K(f_c^p)$ no es conexo también tienen restricción a una aplicación de tipo cuadrático y sus anillos fundamentales también se mueven holomorfamente. Por un argumento de implosiones parabólicas se puede *inflar* Λ_1 alrededor de c_1 para obtener una vecindad Λ que contiene Λ_1 y también a c_1. Como estamos en el caso primitivo resulta que f_{c_1} también es renormalizable de periodo p. Los parámetros en Λ para los cuales f_c^p no es renormalizable de periodo p también tienen restricción a una aplicación de tipo cuadrático de periodo p y sus anillos fundamentales también se mueven holomorfamente. Por lo tanto $\{f_c^p : c \in \Lambda\}$ es una familia de tipo cuadrático equipada, usando otros resultados de implosión parabólica se puede probar que esta familia es propia y que además está desplegada por lo que en efecto, existe una correspondencia entre copias de $\mathcal{M}$ y familias de tipo cuadrático propias, desplegadas y equipadas. Una prueba rigurosa de esta última parte puede ser consultada en [4].

Referencias

[1] M. Lyubich, *Conformal Geometry and Dynamics of Quadratic Polynomials*, vol. I-II of *www.math.stonybrook.edu/ mlyubich/book.pdf.*

[2] M. Lyubich, "Baby mandelbrot sets, renormalization and mlc," *Gazette des Mathmaticiens*, vol. 113, 2007.

[3] A. Douady and J. H. Hubbard, "On the dynamics of polynomial-like mappings," *Annales scientifiques de lcole normale supérieure*, vol. 18, no. 2, pp. 287–343, 1985.

[4] P. Hassinsky, "Modulation dans lensemble de mandelbrot," *The Mandelbrot Set, Theme and Variations*, vol. 274, pp. 37–66, 2000.