Primer Verano de la Investigación en Matemáticas 2016, Instituto de Matemáticas, UNAM, Unidad Cuernavaca

Ejemplos de algunas funciones interesantes en el análisis matemático básico

Alejandra Morales Orduño
Asesor: Jorge Rivera Noriega

Agosto, 2016

1 Introducción

En este proyecto se propone exponer algunos ejemplos de funciones del análisis matemático básico que puedan tener alguna conexión con algún problema geométrico. Por la restricción de tiempo, nos fue posible abarcar sólo tres ejemplos: *Una curva que llena el plano*, *Una función diferenciable en ninguna parte* y *El problema isoperimétrico*.

2 Algunos ejemplos

2.1 Una curva que llena el plano

En esta parte del proyecto se repasa la convergencia uniforme de funciones y su relación con la continuidad, para luego exhibir el ejemplo de la función de Schoenberg, analizando matemáticamente su creación. Otros ejemplos se ilustran sin cubrir detalles, sólo gráficamente.

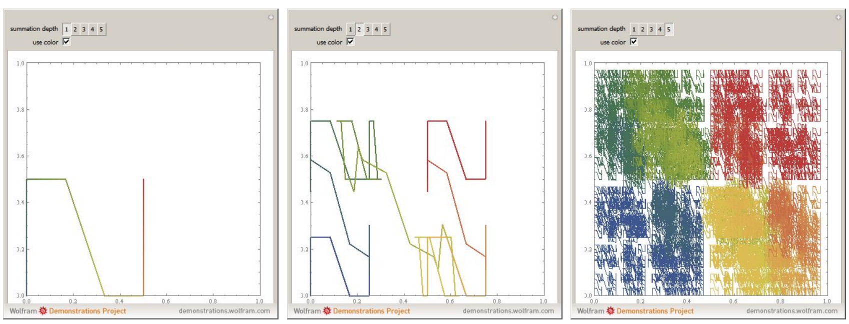

Figure 1: Gráfica de la función de Schoenberg para n=1,2, 5.

2.2 Una función diferenciable en ninguna parte

Se describe a detalle el ejemplo de la función de Weierstrass que resulta diferenciable en ningón lado. Para esta parte se asumen algunos resultados básicos de series de Fourier, que nos permiten trabajar de una manera más sencilla con la función.

2.3 El problema isoperimétrico

Este problema consiste en encontrar una prueba de que, asumiendo que hay una figura con mayor área (área máxima) que todas aquellas que tienen el mismo perímetro, esta figura debe ser un círculo.

Primero se da una prueba intuitiva de que efectivamente, al asumir la existencia de dicha figura que máximiza el área, ésta debe ser un círculo. Más adelante, con series de Fourier, llegamos a la deducción de que esta figura ciertamente existe y es un círculo.

3 Un comentario final

Un tema común a los tres problemas es el de la convergencia en series: en el primer ejemplo, la convergencia es uniforme, mientras en los últimos dos es suficiente la convergencia puntual; de hecho, en el tercer problema se utiliza un resultado de isometría (identidad de Parseval) entre los espacios $L^2([0,2\pi],\frac{dt}{2\pi})$ y $l^2\ (\mathbb{Z})$.