Cálculo fraccionario y mecánica celeste

Alejandra Torres Manotas
alejandra.torresm@konradlorenz.edu.co
Investigador asesor: Antonio Sarmiento Galán

Introducción

La Mecánica Celeste tiene como objetivo el estudio del movimiento de cuerpos con propiedades físicas como masa, carga eléctrica, magnetismo, entre otras. Aplicando para ello los principios de la mecánica clásica dados por las leyes de Newton.

El problema principal de la Mecánica Celeste, se conoce como el problema de n-cuerpos, en el cual se modela el comportamiento de n-partículas perfectamente esféricas m_i y m_j, con coordenadas de posición r_{ij}, con $0 < i, j \leq n$, en $\mathbb{R}^3$, descrito por medio del siguente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r_i}}{dt^2} = \sum_{i \neq j}^{n} F_{ij} \quad \text{con } i = 1, .., n, \tag{1}$$

con

$$F_{ij} = G \frac{m_i m_j}{|r_{ij}|^3} \vec{r_{ij}}, \tag{2}$$

que en general es un problema abierto en mecánica celeste.

Como casos particulares del problema de n-cuerpos, se conoce la solución para el problema de 1-cuerpo o *problema de Kepler*, el problema de 2-cuerpos (por medio de una recucción del sistema de ecuaciones diferenciales a la ecuación del problema de Kepler), y para los cuales la solución es la ecuación géneral de las cónicas en coordenadas polares

$$r = \frac{P}{1 + e \cos(\theta)}, \tag{3}$$

es decir, las trayectorias pueden ser en forma de una elípse, una hipérbola, una parábola o alguna cónica degenerada, dependiendo de los valores de P y e, que son funciones dependientes de la energía del sistema y el momento angular.

La mayor parte de las aplicaciones del cálculo fraccionario trabajan sobre sistemas físicos disipativos. Por esta razón el objetivo del trabajo durante el verano de investigación, es entender la extensión de cálculo a ordenes no enteros positivos, y poder ver, más adelante, si es posible estudiar sistemas no disipativos como el problema de Kepler, bajo estas condiciones.

Cálculo fraccionario

El cálculo fraccionario es un área de las matemáticas que estudia la extensión de las definiciones tradicionales de los operadores derivada e integral cuando los exponentes no son enteros, sino cualquier real o complejo [2].

En una carta de L'Hopital a Leibniz (1695) preguntandole sobre la notación utilizada para la derivada n-ésima

$$\frac{D^n f(x)}{Dx^n}, \tag{4}$$

presente en uno de sus artículos, al considerar $n = \frac{1}{2}$, Leibniz respondió que era una paradoja, que algún día las sucesiones podran dar solución. Aquí es donde nace el cálculo fraccional [1]. Basados en esta misma pregunta muchos matemáticos trabajaron sobre estos operadores y dieron diferentes definiciones para las derivadas e integrales en cada caso [2]:

- En 1812, Laplace definió la derivada fraccionaria o de orden arbitrario que aparecía en los textos de Lacroix (1819), que también se conoce como la fórmula de Euler (1730). Lacroix consideró $y = x^m$, donde $m \in \mathbb{Z}^+$, y desarrolló su n-ésima derivada [1]

  $$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \leqslant n. \tag{5}$$

  Usando la función Gamma, obtuvo que:

  $$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \tag{6}$$

  Lacroix también dió un ejemplo considerando $y = x$ y $n = \frac{1}{2}$, obteniendo

  $$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}. \tag{7}$$

- Entre 1820 y 1822, Fourier basado en la respresentación integral

  $$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz, \tag{8}$$

  con $f(z) = \cos(px - pz)$, es decir,

  $$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz) dp, \tag{9}$$

  generaliza la derivada de la función como

  $$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz + n\frac{\pi}{2}) dp, \tag{10}$$

- Entre 1823 y 1826 Henrik Abel duarante el estudio del problema de la curva tautocrona considera la presentación integral

$$\Phi(x) = \int_o^x \frac{s'(\eta)}{(x-\eta)^\alpha} d\eta, \tag{11}$$

para un α arbitrario, y obtiene que

$$s(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{-\alpha}\Phi(x)}{dx^{-\alpha}}, \tag{12}$$

considerada como la primera aplicación del cálculo fraccionario [3].

- J. Lioville (1832-1855) consideró la derivada

$$\frac{d^m e^{ax}}{dx^m} = a^m e^{ax} \tag{13}$$

expandiendola de forma natural a derivadas de cualquier orden, por medio de la siguiente expresión en series

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \tag{14}$$

y obtiene

$$\frac{d^m f(x)}{dx^m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (a_n)^m e^{a_n x}, \tag{15}$$

conocida como *la primera función*, la cual tiene problemas cuando la serie no es convergente [3]. Lioville consideró para funciones de la forma x^{-a} con $a > 0$ la forma integral

$$I = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-xu} du, \tag{16}$$

y sustituyó $xu = t$, para obtener

$$x^{-a} = \frac{I}{\Gamma(a)}. \tag{17}$$

- Riemman entre 1847 y 1876 dió la definición de integral fraccionaria

$$\frac{d^v}{dx^v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt + \psi(x), \tag{18}$$

que de forma simplificada se escribe como:

$$_cD_x^{-v} f(x) \;\; \texttt{con} \;\; v \geq 0, \tag{19}$$

que es la función a lo largo del eje x, donde c y x son los limites de la integración fraccional. Además establece criterios sobre la definición que debe tener la integral fraccionaria [3]:

1. Si f es una función analítica en los complejos, entonces la integral fraccionaria es una función analítica.

2. Si v es una entero positivo, el resultado se reduce a la derivada ordinaria, pero si por el contrario v es un estero negativo, se dice que $v = -n$ y se obtiene el resultado de una derivada ordinaria.
3. Si $v = 0$ la derivada da como resultado la función.
4. El operador que define la integral fraccionaria es lineal.
5. La ley de los exponentes para la integración de orden arbitrario se conserva
$$_cD_x^{-v} f(x)_c D_x^{-u} f(x) =_c D_x^{-(u+v)} f(x). \tag{20}$$

La definición que cumple estos criterios fue dada por Lioville y Riemann

$$_cD_x^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt \tag{21}$$

donde, si $c = 0$ la definición es equivalente a la definición de Riemann y si $c = -\infty$, la definicion es equivalente a la definición de Lioville.

Referencias

[1] Shantanu Das, *Functional fractional calculus*, Springer Science & Business Media, 2011.

[2] Majid Bashour Mehdi dalir, *Applications of fractional calculus*, Applied Mathematical Sciences **4** (2010), no. 21, 1021–1032.

[3] Bertram Ross, *Lecture notes in mathematics. fractional calculis and its applications*, vol. 457, Springer-verlang, 1974.