NOTAS DE TEORIA DE FUNCIONES ARMONICAS

Notación
R:=Numeros reales.
C:=Numeros complejos.
R^n:=Denota el espacio euclideano de dimension n.
U:= Es un abierto de R^n
$X:=(x_1,x_2,\ldots x_n)$
$[X]:=(x_1^2 + x_2^2 +\ldots+ x_n^2)^{(1/2)}$
$D_¡^n(f)$:=Denota la n-esima derivada de f con respecto a la variable ¡.

Comencemos por definir una función armónica.
Definición: Una función f que va de un abierto U de R^n en C (donde n es un entero mayor que 1) cual tiene segundas derivadas parciales y estas son continuas, es decir f esta en $C^2(U)$, se dice que es armónica si cumple que $D_1^2 + D_2^2 +\ldots.+ D_n^2=0$. .....(*)

La ecuación (*) se llama ecuación de Laplace. Veamos algunos ejemplos de funciones armónicas.

Ejemplo 1: Toda función constante es armónica.

Ejemplo2: Ya que f va de un subconjunto U de R^n podemos entonces considerar las funciones coordenadas, esto es $f(X) = x_¡$ para todo $¡=1\ldots n$. Estas funciones son claramente armónicas.

Ejemplo 3: Una función de gran importancia en teoría de funciones armónicas es $f(X)=[X]^{2-n}$ cual probaremos que es armónica.

$D_¡(f(X)) = (2-n)x_¡[X]^{-n}$
$D_¡^2(f(X)) = (2 - n)(-n)([X]^{-n-2})x_¡^2 + (2 - n)[X]^{-n} = ([X]^{-n-2})(2 - n)([X]^2 - nx_¡)$.
Entonces el laplaciano de $[X]^{2-n}$ es
$D_1^2 + D_2^2 +\ldots+ D_n^2 = ([X]^{-n-2})(2 - n)([X]^2 - nx_1^2 + [X]^2 - nx_2^2 +\ldots+ [X]^2 - nx_n^2) = ([X]^{-n-2})(2 - n)(n[X]^2 - n(x_1^2 + x_2^2 +\ldots+ x_n^2) = ([X]^{-n-2})(2 - n)(n[X]^2 - n[X]^2) = ([X]^{-n-2})(2-n)0 = 0$.

Ahora probemos algunos resultados básicos sobre funciones armónicas.

Proposicion:
Las derivadas parciales de una función armónica son armónicas.

Demostración:

Sea f una función armonica de un abierto U de R^n en C, y sea D¡(f) la i-esima derivada parcial de f. Tenemos que D1^2(f) + D2^2(f) + …+ Dn^2(f)=0.
Entonces la ecuación de Laplace de D¡(f) es:
D1^2(D¡(f)) + D2^2(D¡(f)) +…+Dn^2(D¡(f)) =
D¡(D1^2(f)) + D¡(D2^2(f)) +…+ D¡(Dn^2(f)) = D¡(D1^2(f) + D2^2(f) …+Dn^2(f)) = D¡(0)=0.

Proposición:
Una función f sobre un abierto U de R^2 en R es armónica si y solo si es la parte real de una función holomorfa.

Demostración:
==>
Sea F(x,y)=u(x,y)+iv(x,y) función holomorfa y f armónica. Queremos ver que f=u, para esto probaremos que Dx(f)=Dy(v) y Dy(f)=-Dx(v). Tenemos que Dxx(f)+Dyy(f)=0, y por otro lado tenemos que Dyx(g)=Dxy(g) para toda g que va de R^2 en R. Entonces Dxx(f)+Dyy(f)=0=Dyx(v)-Dxy(v) entonces
Dxx(f)=Dyx(v) y Dyy(f)=-Dxy(v) entonces
Dx(f)=Dy(v) y Dy(f)=-Dx(v) que es lo que queriamos probar.

<==
Tenemos que Dx(f)=Dy(v) y Dy(f)=-Dx(v) entonces Dxx(f)=Dyx(v) y Dyy(f)=-Dxy(v) entonces Dxx(f)+Dyy(f)=Dyx(v)-Dxy(v)=0. Lo cual prueba que f es armonica.

Jesus Alexis Aburto Duarte.
Instituto de Matemáticas unidad Cuernavaca.