INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM, UNIDAD CUERNAVACA

PRIMER VERANO DE INVESTIGACIÓN

Reporte de investigación.

Teoremas de Cauchy y algunas aplicaciones de la teoria de Residuos

Profesor: Emilio Marmolejo Olea

Alumno: Sonia Venancio Guzmán

Cuernavaca Morelos,Agosto 2016.

RESUMEN

En este reporte se describirán de forma breve algunos temas de que fueron estudiados a lo largo de este primer verano de Investigación. En mi caso fueron temas acerca del análisis complejo así como algunas aplicaciones en la resolución de algunos problemas del mismo. Entre los principales temas de estudio fueron: funciones holomorfas , teoremas de Cauchy, el famoso teorema del residuo y transformada de fourier. Estos temas fueron estudiados principalmente con ayuda del libro "Complex Analysis" de Elias M. STEIN y RAMI SHAKARCHI.

1 Temas

1.1 Funciones holomorfas

1.2 Teoremas de Cauchy y algunas aplicacioness

1.3 Funciones meromorfas

1.4 Transformada de Fourier

1.1 Funciones Holomorfas

Se dice que una función es holomorfa en $\Omega \subset C$ (conjunto de los números complejos), Ω conjunto abierto, si $f = U + Vi$ es derivable en cada unos de los puntos $z \in \Omega$, con $z = x + yi$. (Diferenciable en el sentido complejo).
Cabe notar que al igual que en funciones de valores reales, aquí también se cumple que las funciones diferenciables (Holomorfas) son funciones continuas.

Por otra parte la condición de analiticidad de una función inducen ciertas relaciones importantes, entre la parte imaginaria(V) y la parte real (U) de la función, las cuales se pueden ver en el teorema siguiente, un teorema fuerte de funciones analíticas.

Teorema 1 *Ecuaciones de Cauchy Riemann*
f es holomorfa en $\Omega \subset C$ si y sólo si U y V son diferenciables en todo punto de Ω y cumplen las ecuaciones de Cauchy Riemann siguientes:
$U_x = V_y$, $U_y = -V_x$, $\forall z \in \Omega$

Observación: Notar que el hecho de que se satisfagan las condiciones de Cauchy no nos asegura que la función sea diferenciable, sin embargo añadiendo la condición de continuidad de las derivadas parciales de U y V si podemos asegurar la diferenciabilidad.

1.2 Teorema de Cauchy y algunas aplicaciones

En el estudio de los teoremas de Cauchy se necesito tener presente la definición de las funciones holomorfas , así como integración a lo largo de curvas , además de algunos otros conceptos para poder resolver algunos ejercicios de aplicaciones.
Dentro de este tema también, se vieron resultados muy importantes, sin embargo, solo algunos de los mas importantes se enuncian a continuación:

Teorema 2 *Sea f una función holomorfa en un disco D, entonces para cualquier curva simple y cerrada γ contenida en D, la integral de f sobre dicha curva es cero, esto es :*

$\int_\gamma f(z)dz = 0$

Notése que este teorema en realidad es muy importante en la teoría del análisis complejo y más en el área de aplicación , puesto que con ayuda de este teorema se resolvieron ejercicios como son : el calculo de integrales a lo largo de curvas , integrales que de cualquier otra forma o métodos serían mucho mas complejos de resolver o bien , en su defecto para tener otra alternativa de resolución de dichos problemas.

En cuanto al siguente teorema:

Teorema 3 *Si f es holomorfa en un conjunto abierto $\Omega \subset C$ y si D es un disco centrado en el punto Z_0 , con $D \subset \Omega$ entonces f tiene un desarrollo de serie(Convergente) alrededor del punto Z_0 , i,e.*

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$

En el caso de funciones complejas esté resultado es también de gran ayuda pues es utilizado para probar que toda función holomorfa es infinitamente diferenciable.

Teorema 4 *Si f es una función entera (diferenciable en todo el plano complejo) y acotada entonces f es una función constante.*

1.3 Funciones meromorfas

Se dice que las funciones meromorfas son aquellas funciones que son holomorfas, excepto en conjunto de puntos aislados, llamados polos de la función.

Nota: Un punto Z_0 es un punto singular, si la función f no es holomorfa en el punto y en cada vecindad del punto existen puntos donde la función es holomorfa y una función es meromorfa en una región , si lo es en cada uno de sus puntos de la región.

Dentro del estudio de las funciones meromorfas se vieron subtemas como son: ceros y polos de la función.
Los ceros de una función al igual que en funciones de valores reales tienen resultados muy similares.

En cuanto a los polos, se dice que un punto z_0 es polo de una función si la función $\frac{1}{f}$ tiene como cero al punto z_0 , esto es, los polos de una función son un tipo de singularidad de f.
En realidad la teoria de las funciones meromorfas es bastante extensa,así como equivalencias de que un punto sea un polo también.

Uno de lo teoremas de mayor relevancia en esta sección fue el famoso teorema del residuo, que al igual que el teorema de Cauchy nos ayuda a resolver algunas integrales, que en cualquier otro caso es mucho mas complicado ver. Este teorema establece lo siguiente:

Teorema 5 *Suponga que f es holomorfa en un conjunto abierto que contiene a la circunferencia C , junto con su interior y el punto Z_0 es un polo de la función contenida en C, entonces :*

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i Res_{Z_0} f$$

Nótese que la teoría de residuos proporciona una forma rápida y muy efectiva para resolver integrales de ese tipo, además puede trabajarse de dos formas:
Si se conoce el valor de la integral entonces es fácil encontrar los residuos de la función y en caso contrario si son conocidos los residuos de la función entonces podemos encontrar el valor de la integral de forma sencilla.

1.4 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una aplicación definida de la siguiente forma:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-2\pi i x\xi)dx,\ \xi \in \Re \tag{1}$$

La función f debe de cumplir ciertas condiciones para , poder hablar de esta aplicación,con estas condiciones se define la clase F.Condiciones que no se mensionaran pues son algo extensas, el objetivo de este reporte es solo mostrar de forma rápida ciertos resultados importantes en este tema.

De esta aplicación también podemos mensionar que la transformada es una función acotada (lo cual se puede probar, rápidamente por una de las condiciones que cumple la función $f \in F$)y además es continua , esto se ve por el teorema de la convergencia dominada (Tema de teoria de la medida).

Algunos teoremas fueron:

La acción de la trasformada de fourier en funciones de la clase F.

Teorema 6 *Si $f \in F$ entonces la transformada inversa esta dada por:*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\exp(2\pi i x\xi)d\xi,\ x \in \Re \tag{2}$$

Teorema 7 *Teorema de la sumatoria de Poisson*
Si f esta en la clase F , entonces:

$$\sum_{n\in Z} f(n) = \sum_{n\in Z} \hat{f}(n) \tag{3}$$

Este teorema tiene muchas consecuencias y es de gran importancias en ciertas aplicaciones.

CONCLUSIONES

El estudio del analisis complejo, en particular las aplicaciones de la teoria de residuos y la transformada de fourier, puede llegar a ser un poco complicado, sin las herramientas necesarias, sin embargo es bastante grato estudiar estos temas ya que, en mi opinión toda la teoria estudiada es bastante interesante de ver , a veces algo complejo de verlo por primera vez, pero con el estudio adecuado ,en realidad no es tan difícil de ver y entender los teoremas que a simple vista parecieran muy complicados. Además las aplicaciones son bastante llamativas, pues para estos no solo se requería de teoria, si no también entender el comportamiento de ciertas funciones.