Verano de Investigación

Adrian Alberto De Flon Gasca

20 de octubre de 2017

1. Introducción

Aquí presentaremos los conceptos básicos concernientes a la geometría Riemanniana. En la primer sección introducimos el concepto de conexión en una variedad diferenciable, demostramos el teorema fundamental de la geometría Riemanniana junto con algunas propiedades básicas de las conexiones.

En la segunda sección introducimos el concepto de curvatura a través del endomorfismo de curvatura R, y su equivalente el tensor de curvatura $\mathscr{R}$. Demostramos sus propiedades básicas y con esto definimos el tensor de Ricci Ric y la curvatura escalar κ, que son los conceptos principales de curvatura para una variedad Riemanniana.

Agradezco al Programa para un Avance Global e Integrado de la MatemáticaMexicana, proyecto FORDECyT, clave 265667. También quisiera agradecer a mi asesor durante mi estancia en el Instituto de Matemáticas Unidad Cuernavaca, Gregor Weingart, y a los organizadores del evento.

2. Variedades Riemannianas

Definición 2.1. Sea M una variedad diferenciable. Una métrica Riemanniana sobre sobre M es una aplicación g que asocia a cada $p \in M$ un producto escalar $g_p : T_pM \to \mathbb{R}$, que varía diferenciablemente respecto a p, es decir, si $x : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$ es una carta coordenada con $(x^1, \ldots, x^n) = q \in M$ entonces $g_q(\frac{\partial}{\partial x^\mu}(q), \frac{\partial}{\partial x^\nu}(q)) = g_{\mu\nu}(q)$ es una función diferenciable de U en $\mathbb{R}$.

Otra forma de describir la métrica Riemaniana es con respecto a la base dual $\{dx_q^\mu\} \subseteq (T_pM)^*$ definida por $dx_q^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \delta_{\mu\nu}$ la delta de Kronecker. Podemos definir $g_q = \sum_{\mu,\nu=1}^n g_{\mu\nu}(q)dx_q^\mu \otimes dx_q^\nu$, donde $dx_q^\mu \otimes dx_q^\nu : T_qM \times T_qM \to \mathbb{R}$ es la función bilineal definida por $dx_q^\mu \otimes dx_q^\nu(\frac{\partial}{\partial x^\eta}, \frac{\partial}{\partial x^\xi}) = \delta_{\mu\eta}\delta_{\nu\xi}$. Una variedad M dotada con una métrica Riemanniana g es llamada una variedad Riemanniana (M, g). Siempre que se define un nuevo objeto matemático, hay que decir cuando dos de estos objetos son equivalentes.

Definición 2.2. $\varphi : (M, g) \to (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ es una isometría si y sólo si φ es un difeomorfismo y $\forall u, v \in T_pM \forall p \in M \; g_p(u, v) = \widetilde{g}_q(d\varphi(u), d\varphi(v))$ donde $q = \varphi(p)$.

Para una definición más general de isometría necesitamos defnir lo que es el pushforward y el pullback de un difeomorfismo.

Definición 2.3. Sea $\varphi : M \to N$ difeomorfismo.

- El pushforward de φ es una aplicación diferenciable $\varphi_* : \Gamma(TM) \to \Gamma(TN)$ definida por $\varphi_*(X)(f) = X(f \circ \varphi)$, para $X \in \Gamma(TM)$ $f \in C^\infty(N)$
- El pullback de φ es una aplicación diferenciable $\varphi^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ definida por $\varphi^*(h) = h \circ \varphi$ con $h \in C^\infty(N)$

Algunas propiedades del pushforward: Sea $\varphi : M \to N$ difeomorfismo. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(M)$, $h \in C^\infty(N)$, $X, Y \in \Gamma(TM)$.

1. $\mathbb{R}$-lineal: $\varphi_*(aX + bY) = a\varphi_*X + b\varphi_*Y$
2. $\varphi_*(fX)h = (fX)(h \circ \varphi) = (\varphi^{-1})^*(f)\varphi_*Xh$
3. $(\varphi_*)^{-1} = (\varphi^{-1})_*$

Propiedades del pullback: Sea $\varphi : M \to N$ difeomorfismo. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(M)$ y $h \in C^\infty(N)$

1. $\mathbb{R}$-lineal: $\varphi^*(aX + bY) = a\varphi^*X + b\varphi^*Y$
2. $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$

Con esta nueva notiación, $\varphi : (M, g) \to (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ es una isometría si y sólo si φ es un difeomorfismo y $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ $g(X, Y) = \varphi^*\widetilde{g}(\varphi_*X, \varphi_*Y)$,

2.1. Conexiones

Para poder definir el concepto de curvatura en una variedad Riemanniana, necesitamos primero extender el concepto de linea recta, a esta generalización se le da el nombre de geodésica. Una forma en la que podriamos definir una geodésica es como la curva que minimiza longitud de arco, pero aún no sabemos medir distancias en una variedad Riemanniana, así que haremos uso de otra caracterización de line recta euclideana.

Podemos caracterizar una linea recta en el espacio euclideo como una curva cuya aceleración (o segunda derivada) es identicamente cero. Es decir, una curva con velocidad constante.

Consideremos una subvariedad suave $M \subseteq \mathbb{R}^n$ con la métrica Riemanniana inducida, sea γ una curva contenida en M. Una forma intuitiva para definir una geodésica sería computar la aceleración Euclideana $\ddot{\gamma}(t)$ de manera usual y luego tomar la proyeccion ortogonal al espacio tangente $T_{\gamma(t)}M$, esto nos define un vector $\ddot{\gamma}(t)^{\text{tang}}$ tangente a M, la aceleración tangencial de γ. Podríamos definir así una geodésica como las curvas en M que tienen aceleración tangencial cero.

En una variedad Riemanniana abstracta, la cual no esté encajada en un espacio Euclideano en el cual calcular la aceleración, esta técnica no está disponible. Tenemos que encontrar una alternativa para calcular la aceleración de una curva. Sea $\gamma : (a, b) \to M$ una curva suave. el vector velocidad $\dot{\gamma}(t)$ tiene una definición independiente de cartas coordenadas, sin embargo, a diferencia de la velocidad, el vector aceleración no es invariante bajo cambio de coordenadas. Un ejemplo simple es considerar el círculo unitario S^1 en el plano parametrizado por $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ su aceleración en el tiempo t es el vector unitario $(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = (-\cos t, -\sin t)$ sin embargo en coordenadas polares, podemos parametrizar el circulo como $(r(t), \theta(t)) = (1, t)$, en estas coordenadas el vector aceleración es $(\ddot{r}(t), \ddot{\theta}(t)) = (0, 0)$!

El problema es el siguiente: si quisieramos darle sentido a $\ddot{\gamma}(t_0)$ diferenciando $\dot{\gamma}(t)$ respecto t, tendríamos que involucrar la diferencia de los vectores $\dot{\gamma}(t)$ y $\dot{\gamma}(t_0)$, sin embargo estos viven en espacios vectoriales distintos ($T_{\gamma(t)}M$ y $T_{\gamma(t_0)}M$ respectivamente) por lo que no tiene sentido operarlos.

Definición 2.4. Una conexión lineal es una aplicación

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ (\quad X \quad , \quad Y \quad) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisface lo siguiente:

i) $\nabla_X Y$ es $C^\infty(M)$–lineal en X, si $f, g \in C^\infty(M)$:

$$\nabla_{fX_1 gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y$$

ii) $\nabla_X Y$ es $\mathbb{R}$–lineal en Y, si $a, b \in |R$

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$$

iii) ∇ debe satisfacer la siguiente regla del producto para $f \in C^\infty$

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$$

Un resultado directo de la definición es que, aunque esta aplicación está definida de manera global, el valor que toma $\nabla_X Y|_p$ sólo depende de los valores de X y Y en una vecindad de p.

Lema 2.1. *Sea $U \subseteq M$ una vecindad abierta de p y $X, \widetilde{X}, Y, \widetilde{Y} \in \Gamma(TM)$, tales que $X|_U = \widetilde{X}|_U$ y $Y|_U = \widetilde{Y}|_U$. Entonces $\nabla_X Y\big|_p = \nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\Big|_p$*

Demostración. Primero consiferemos X fijo. Por la $\mathbb{R}$ linealidad sobre Y, reemplazando Y por $Y - \widetilde{Y}$ basta probar que $\nabla_X Y = 0$ siempre que $Y|_U = 0$. Sea $\varphi \in C^\infty$ función auxiliar con soporte en U y $\varphi(p) = 1$. Como Y se anula en U, $\varphi Y \equiv 0$ en M, entonces $\nabla_X(\ \varphi Y)\ =\ \nabla_X(0 \cdot \varphi Y)\ = 0\,(\ \nabla_X \varphi Y)\ =\ 0$, aplicando la regla del producto tenemos que $0 = \nabla_X(\varphi Y) = X(\varphi)Y + \varphi \nabla_X Y$. Como $Y \equiv 0$ en el soporte de φ entonces $X(\varphi)Y \equiv 0$ en M. Evaluando en p obtenemos que $\nabla_X Y\big|_p = 0$.

Ahora consideremos Y fijo, por un argumento similar al anterior basta probar que $\nabla_X Y\big|_p = 0$ siempre que X se anule en U. Tomamos φ la misma función auciliar. $\varphi X \equiv 0$ en M, entonces $\varphi(\nabla_X Y) = \nabla_{\varphi X} Y = \nabla_{0 \cdot \varphi X} Y = 0 \nabla_{\varphi X} Y = 0$, es decir, $\varphi \nabla_X Y \equiv 0$ en M. Evaluando en p obtenemos $.\nabla_X Y\big|_p = 0$ □

Por ser ∇ lineal C^∞ en la primer entrada, el valor de $\nabla_X Y\big|_p$ sólo depende del valor de X en p.

Lema 2.2. *Si $X, \widetilde{X} \in \Gamma(TM)$ son tales que $X_p = \widetilde{X}_p$ entonces $\nabla_X Y\big|_p = \nabla_{\widetilde{X}} Y\big|_p$.*

Demostración. Por linealidad, sustituyendo X por $X - \widetilde{X}$ podemos suponer $X_p = 0$ y probar que $\nabla_X Y\big|_p = 0$.

Por el lema anterior, nos importa sólo el valor de X en una vecindad U de p. Sea $x : U \to \mathbb{R}^n$ carta local de manera que $X = \sum_{\mu=1}^n X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ donde $X^\mu \in C^\infty(M)$ y $X^\mu(p) = 0$.

Aplicando la C^∞-linealidad de ∇ sobre X: $\nabla_X Y\big|_p = \sum_{\mu=1}^n X^\mu(p)\, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} Y\Big|_p = 0$ □

Ahora, dada una variedad Riemanniana, sólo falta asociarle una conexión de manera canónica.

Si $U \subseteq M$ es un abierto no vacío, denotamos por $TU\{(p, v) \in TM : p \in U\}$ el haz tangente a U. Notemos que para $p \in M$ $T_pM = T_pU$.

Definición 2.5. Un marco local es un conjunto $\{E_\mu\}_{\mu=1}^n \subseteq \Gamma(TU)$ tal que, para cada $p \in U$ el conjunto $\{E_\mu(p)\}$ es una base de T_pM. Decimos que el marco es global si está definido en todo TM, es decir si $U = M$.

Como una conexión está determinada por los valores lovales, podemos describirla en términos de un marco local $\{E_\mu\}$.

$$\nabla_{E_\mu} E_\nu = \sum_{\lambda=1}^n \Gamma_{\mu\nu}^\lambda E_\lambda$$

Esto define n^3 funciones $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ en U, conocidas como los símbolos de Christoffel de ∇. Analogamente podemos extender el concepto de base dual:

Definición 2.6. Sea (U, x) carta local, el marco dual al marco local $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ es $\{dx^\mu\}$ definido por $dx^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \delta_{\mu\nu}$.

Definición 2.7. Decimos que una conexión ∇ es compatible con la métrica si y sólo si se satisface la siguiente igualdad para cuales quiera $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Definición 2.8. Una conexión ∇ en el haz tangente TM de una variedad M es libre de torción siempre y cuando se satisfaga la siguiente ecuación:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Donde $X, Y \in \Gamma(TM)$ y $[X, Y]$ es el corchete de Lie definido definido por $[X, Y] = XY - YX$

Antes que nada comprobemos que los corchetes de Lie son, en efecto, una aplicación $[-,-] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$. Para esto, calculámos los corchetes de Lie en coordenadas locales. Sea (U, x) carta local, escribimos $X = \sum_{\mu=1}^{n} X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ y $Y = \sum_{\nu=1}^{n} Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$:

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= XY - YX \\
&= \sum_{\mu=1}^{n} X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big) - \sum_{\nu=1}^{n} Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big(\sum_{\mu=1}^{n} X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} X^\mu \Big(\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} + Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big) - \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} Y^\nu \Big(\frac{\partial}{X}^\mu \partial x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^{mu}}\Big) \\
&= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \Big(X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - Y^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big) + \Big(X^\mu Y^\nu \frac{\partial}{\partial^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - Y^\nu X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \Big(X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - Y^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big)
\end{aligned}$$

En conclución, escribimos los corchetes de Lie en coordenadas locales como:

$$[X, Y] = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \Big(X^\nu \frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\nu} - Y^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\Big)\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Que en efecto, al ser X^ν, $\frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\nu}$, Y^ν y $\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}$ funciones suaves, es un campo vectorial sobre M.

De aquí en adelante para simplificar la notación escribiremos ∂_μ en lugar de $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Algunas propiedades básivas de los corchetes de Lie son las siguientes:

Proposición 2.3. *El corchete de Lie* $[-,-] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ *definido por* $[X, Y] := XY - YX$ *satisface:*

1. *Antisimetría:* $[X, Y] = -[Y, X]$
2. $\mathbb{R}$*–bilinealidad:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $[aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1, Y] + b[X_2, Y]$ *y* $[X, aY_1 + bY_2] = a[X, Y_1] + b[X, Y_2]$
3. *La siguiente regla del producto:* $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$ *donde* $f \in C^\infty(M)$.
4. *Identidad de Jacobi:* $[X, [Y, Z]] + [Y[Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Demostración. 1) $[X, Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y, X]$

2) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, como $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ son derivaciones, en particular son $\mathbb{R}$-lineales por lo que

$$\begin{aligned}
[aX_1 + bX_2, Y] &= (aX_1 + bX_2)Y - Y(aX_1 + bX_2) \\
&= aX_1Y - aYX1_1 + bX_2Y - bYX_2 \\
&= a[X_1, Y] + b[X_2, Y]
\end{aligned}$$

Analogamente $[X, aY_1 + bY_2] = a[X, Y_1] + b[X, Y_2]$, con $X, Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$

3) Sean $f \in C^\infty(M)$ y $X, Y \in \Gamma(TM)$.

$$\begin{aligned}[fX, Y] = fXY - Y(fX) &= fXY - (Y(f)X + fYX \\ &= fXY - fYX - Y(f)X \\ &= f[X, Y] - Y(f)X.\end{aligned}$$

4) Sean $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, entonces $[X, [Y, Z]] = [X, YZ - ZY] = X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X = XYZ - ZYX - YZX + ZYX$.

$$\begin{aligned}[X, [Y, Z]] &= XYZ + ZYX - XZY - ZYX \\ [Y, [Z, X]] &= -ZXY - YXZ + XZY + YZX \\ [Z, [X, Y]] &= ZXY + YXZ - ZYX - XYZ\end{aligned}$$

Claramente la suma del lado derecho da 0. □

Sea (U, x) carta local. Notemos que, como las derivadas parciales conmutan, para cada $\mu, \nu, \in \{1, \ldots, n\}$ los corchetes de Lie $[\partial_\mu, \partial_\nu] = \partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\nu = 0$ se anulan. Por lo que, si ∇ es libre de torción, entonces

$$0 = [\partial_\mu, \partial_\nu] = \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu - \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n} \Big(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Big) \partial_\lambda$$

Es decir:

$$\nabla \;\; \texttt{libre de torción} \implies \;\; \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \; = \; \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \qquad \forall \mu,\, \nu, \lambda \in \{1, \ldots, n\}$$

Ahora, supongamos que $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \quad \forall \mu, \nu, \lambda \in \{1 \ \ldots, n\}$. Entonces

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu &= \sum_{\lambda=1}^{n} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda \\ &= \sum_{\lambda=1} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda \\ &= \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu\end{aligned}$$

Sean $X\,Y \ \in \Gamma(TU)$ con expansiones locales $X = \sum_{\mu=1}^n X^\mu \partial_\mu$, $Y = \sum_{\nu=1}^n Y^\nu \partial_\nu$. Entonces:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_{\sum\limits_{\mu=1}^{n} X^\mu \partial_\mu} Y \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} X^\mu \nabla_{\partial_\mu} Y \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} X^\mu \Big(\nabla_{\partial_\mu} \sum_{\nu=1}^{n} Y^\nu \partial_\nu \Big) \\ &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} X^\mu \Big(\partial_\mu (Y^\nu) \partial_\nu + Y^\nu \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu \Big) \\ &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \Big(X^\mu \partial_\mu (Y^\nu) \partial_\nu + X^\mu Y^\nu \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu \Big)\end{aligned}$$

Así, podemos calcular

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y - \nabla_Y X &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \Big(X^\mu \partial_\mu (Y^\nu) \partial_\nu + X^\mu Y^\nu \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu \Big) - \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \Big(Y^\nu \partial_\nu (X^\mu) \partial_\mu + Y^\nu X^\mu \nabla_{\partial_\nu} \partial_\nu \Big) \\
&= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \Big(X^\mu \partial_\mu (Y^\nu) \partial_\nu - Y^\nu \partial_\nu (X^\mu) \partial_\mu + X^\mu Y^\nu \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu - Y^\nu X^\mu \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu \Big) \\
&= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \Big(X^\mu \partial_\mu (Y^\nu) \partial_\nu - Y^\nu \partial_\nu (X^\mu) \partial_\mu \Big) \\
&= [X, Y]
\end{aligned}$$

Acabamos de mostrar que:

$$\begin{array}{lcrcll}
\nabla \ \ \texttt{libre de torción} & \iff & \Gamma^\lambda_{\mu\nu} & = & \Gamma^\lambda_{\nu\mu} & \forall \ \ \mu, \nu, \lambda \in \{1, \dots, n\} \\
 & \iff & \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu & = & \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu & \forall \mu, \nu, \in \{1, \dots, n\}
\end{array}$$

Nota: Este resultado solamente es válido cuando los símbolos de Christoffel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ están asociados al marco local generado por las derivadas parciales $\{ \partial_\mu \}$. En un marco local cualquiera $\{ E_\mu \}$ en general NO es cierto que $[E_\mu, E_\nu] = 0$, lo cual fue necesario en la prueba.

Teorema 2.4 (**Teorema fundamental de la geometría Riemanniana**). *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Existe una única conexión ∇ en el haz tangente TM que es compatible con la métrica g y es libre de torción. Esta conexión es conocida como la conexión de Levi-Civita de g.*

Primeto demostraremos la unicidad de la conexión.

Demostración. Sea ∇ conexión compatible con g y simétrica, sean $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned}
Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\
Yg(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\
Zg(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z X)
\end{aligned}$$

Por la simetría de la conexión, esto puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, [X, Z]) \\
Yg(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) + g(Z, [Y, X]) \\
Zg(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(X, [Z, Y])
\end{aligned}$$

Sumando las primeras dos ecuaciones y restando la tercera obtenemos:

$$Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) = 2g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, [X, Z]) + g(Z, [Y, X]) - g(X, [Z, Y])$$

despejando encontramos la siguiente igualdad, conocida como la fórmula de Koszul.

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) - Zg(X, Y) + Yg(Z, X) - g(Y, [X, Z]) + g(X, [Z, Y]) - g(Z, [Y, X])$$

De la fórmula anterior podemos concluír la unicidad de la coneción de Levi -Civita, pues si ∇^1 y ∇^2 son dos conexiones libres de torción y compatibles con la métrica, al no depender de la conexión el lado derecho de la fórmula de Koszul, tenemos que $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$

$g(\nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, Z) = 0$. Como g es no degenerada, esto pasa si y solamente si $\nabla^1_X Y = \nabla^2_X Y$. Luego $\nabla^1 = \nabla^2$.

Para mostrar la existencia de la conexión de Levi-Civita, basta mostrar que existe para cada carta local ya que por la unicidad aseguramos que la construcción dada en diferentes cartas locales coincidan cuando estas se sobrepongan.

Sea (U, x) carta local. Evaluando en la fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu, \partial_\lambda) &= \partial_\mu g(\partial_\nu, \partial_\lambda) - \partial_\lambda g(\partial_\mu, \partial_\nu) + \partial_\nu g(\partial_\lambda, \partial_\mu) \\
2g(\sum_{\xi=1}^{n} \Gamma^\xi_{\mu\nu}\partial_\xi, \partial_\lambda) &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} \\
2\sum_{\xi=1}^{n} \Gamma^\xi_{\mu\nu} g_{\xi\lambda} &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}
\end{aligned}$$

Al ser g invertible, la matríz de g con entradas $g_{\xi\lambda}$ es invertible, denotamos por $g^{\xi\lambda}$ las entradas de la matriz inversa. Multiplicando ambos lados de la igualdad por esta matriz obtenemos, notando que $\sum_{\lambda=1}^{n} g_{\xi\lambda} g^{\lambda\eta} = \delta_{\xi\eta}$ la delta de Kronecker.

$$2\Gamma^\eta_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} g^{\lambda\eta}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu})$$

Con lo que tenemos definidos los símbolos de Christoffel en cartas locales. De la definición está claro que $\Gamma^\eta_{\mu\nu} = \Gamma^\eta_{\nu\mu}$. Por lo tanto esta conexión es libre de torción.

Compatibilidad de la métrica) Sean $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ con $X = \sum_{\mu=1}^{n} X^\mu \partial_\mu$, $Y = \sum_{\nu=1}^{n} Y^\nu \partial_\nu$ y $Z = \sum_{\xi=1}^{n} Z^\xi \partial_\xi$

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) &= g\Big(\nabla_{\Big(\sum\limits_{\mu=1}^{n} X^\mu \partial_\mu\Big)}, \sum_{\xi=1}^{n} Z^\xi \partial_\xi\Big) \\
&= \sum_{\mu,\xi=1}^{n} X^\mu Z^\xi g(\nabla_{\partial_\mu}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} Y^\nu \partial_\nu\Big), \partial_\xi) \\
&= \sum_{\mu,\xi=1}^{n} X^\mu Z^\xi g(\sum_{\nu=1}^{n} \big(\partial_\mu(Y^\nu)\partial_\nu + Y^\nu \nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu\big), \partial_\xi) \\
&= \sum_{\mu,\nu,\xi=1}^{n} X^\mu Z^\xi \Big(\partial_\mu(Y^\nu) g(\partial_\nu, \partial_\xi) + Y^\nu g(\nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu, \partial_\xi)\Big) \\
&= \sum_{\mu,\nu,\xi=1}^{n} X^\mu Z^\xi \Big(\partial_\mu(Y^\nu) g(\partial_\nu, \partial_\xi) + Y^\nu g(\sum_{\eta=1}^{n} \Gamma^\eta_{\mu\nu}\partial_\eta, \partial_\xi)\Big) \\
&= \sum_{\mu,\nu,\xi=1}^{n} X^\mu Z^\xi \Big(\partial_\mu(Y^\nu) g_{\nu\xi} + Y^\nu \sum_{\eta=1}^{n} \Gamma^\eta_{\mu\nu} g_{\eta\xi}\Big) \\
&= \sum_{\mu,\nu,\xi=1}^{n} X^\mu Z^\xi \Big(\partial_\mu(Y^\nu) g_{\nu\xi} + \frac{Y^\nu}{2}(\partial_\mu g_{\nu\xi} - \partial_\xi g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\xi\mu})\Big) \\
&= \sum_{\mu,\nu,\xi=1}^{n} \Big(X^\mu Z^\xi \partial_\mu(Y^\nu) g_{\nu\xi} + \frac{1}{2} X^\mu Y^\nu Z^\xi (\partial_\mu g_{\nu\xi} - \partial_\xi g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\xi\mu})\Big)
\end{aligned}
$$

Analogamente recordando que por la simetría de $g$se cumple que $g_{\nu\xi} = g_{\xi\nu}$ obtenemos las dos igualdades:

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) &= \sum_{\mu,\nu,\xi=1}^{n} \Big(X^\mu Z^\xi \partial_\mu(Y^\nu) g_{\nu\xi} + \frac{1}{2} X^\mu Y^\nu Z^\xi \big(\partial_\mu g_{\nu\xi} - \partial_\xi g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\xi\mu}\big)\Big) \\
g(Y, \nabla_X Z) &= \sum_{\mu,\nu,\xi=1}^{n} \Big(X^\mu Y^\nu \partial_\mu(Z^\xi) g_{\nu\xi} + \frac{1}{2} X^\mu Y^\nu Z^\xi \big(\partial_\mu g_{\nu\xi} - \partial_\nu g_{\mu\xi} + \partial_x i g_{\nu\mu}\big)\Big)
\end{aligned}
$$

Sumando estas dos igualdades, obtenemos

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) &= \sum_{\mu,\nu,\xi=1}^{n} \big(Y^\nu \partial_\mu(Z^\xi) + Z^\xi \partial_\mu(Y^\nu)\big) X^\mu g_{\nu\xi} + X^\mu Y^\nu Z^\xi \partial_\mu g_{\nu\xi} \\
&= \sum_{\mu,\nu,\xi=1}^{n} X^\mu \partial_\mu(Y^\nu Z^\xi) g_{\nu\xi} + X^\mu Y^\nu Z^\xi \partial_\mu g_{\nu\xi} \\
&= \sum_{\mu,\nu,\xi=1}^{n} X^\mu \Big(\partial_\mu(Y^\nu Z^\xi) g_{\nu\xi} + Y^\nu Z^\xi \partial_\mu g_{\nu\xi}\Big) \\
&= \sum_{\mu,\nu,\xi=1}^{n} X^\mu \partial_\mu\big(Y^\nu Z^\xi g_{\nu\xi}\big) \\
&= \sum_{\mu=1}^{n} X^\mu \partial_\mu\Big(\sum_{\nu,\xi=1}^{n} g(Y^\nu \partial_\nu, Z^\xi \partial_\xi)\Big) \\
&= X g(Y, Z).
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposición 2.5. *Sea $\varphi : (M, g) \to (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ isometría, entonces φ manda la conexión de Levi-Civita ∇ de g en la conexión de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ de $\widetilde{g}$ en el siguiente sentido: $\varphi_*(\nabla_X Y) = \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y$, donde φ_* es el pushforward de φ y $X, Y \in \Gamma(TM)$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \arrow[r, "\varphi_* \times \varphi_*"] \arrow[d, "\nabla"] & \Gamma(T\widetilde{M}) \times \Gamma(T\widetilde{M}) \arrow[d, "\widetilde{\nabla}"] \\
\Gamma(TM) \arrow[r, "\varphi_*"] & \Gamma(T\widetilde{M})
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $F : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ definida por $F(X, Y) = (\varphi_*)^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y)$. Veamos que esta función es una conexión, libre de torción y compatible con la métrica. Por la unicidad de la conexión de Levi-Civita $F = \nabla$, es decir $\nabla_X Y = \varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y)$, con lo que habríamos completado la prueba.

Primero comprobemos que cumple con los axiomas de conexión.

1) $C^\infty(M)$- linealidad en la primer entrada. Sean $f, g \in C^\infty(M)$, $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$.

$$\begin{aligned}
F(fX_1 + gX_2, Y) &= \varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_*(fX+gX_2)}\varphi_* Y) \\
&= \varphi_*^{-1}\widetilde{\nabla}_{f\varphi_* X_1 + g\varphi_* X_2}\varphi_* Y \\
&= \varphi_*^{-1}\big(f\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_1}\varphi_* Y + g\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_2}\varphi_* Y\big) \\
&= f\varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_1}\varphi_* Y) + g\varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_2}\varphi_* Y) \\
&= fF(X_2, Y) + gF(X_2, Y)
\end{aligned}$$

2)$\mathbb{R}$-linealidad en la segunda entrada. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $X, Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$.

$$\begin{aligned}
F(X, aY_1 + bY_2) &= \varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_*(aY_1 + bY_2) \\
&= \varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}(a\varphi_* Y_1 + b\varphi_* Y_2) \\
&= \varphi_*^{-1}(a\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y_1 + b\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y_2) \\
&= a\varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y_1) + b\varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\nabla_* X}\varphi_* Y_2) \\
&= aF(X, Y_1) + bF(X, Y_2)
\end{aligned}$$

3) Regla del producto. Sean $f \in C^\infty(M)$ y $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned}
F(X, fY) &= \varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_*(fY)) \\
&= \varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}((\varphi^*)^{-1}f)\varphi_* Y) \\
&= \varphi_*^{-1}\big[\varphi_* X((\varphi^*)^{-1}f)\varphi_* Y + ((\varphi^*)^{-1}f)\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y\big] \\
&= \varphi_*^{-1}\big[\varphi_*(X(f)Y)\big] + \varphi_*^{-1}\big[((\varphi^*)^{-1}f)\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y\big] \\
&= X(f)Y + f\varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y) \\
&= X(f)Y + fF(X, Y)
\end{aligned}$$

Con esto comprobamos que F es una conexión sobre el haz tangente de M.

Libre de torición) Sean $X, Y \in \Gamma(TM)$.

$$\begin{aligned} F(X,Y) - F(Y,X) &= \varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y) - \varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y) \\ &= \varphi_*^{-1}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y + \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y) \\ &= \varphi_*^{-1}([\varphi_* X, \varphi_* Y] \\ &= \varphi_*^{-1}\big(\varphi_* X \varphi_* Y - \varphi_* Y \varphi_* X\big) \\ &= XY - YX = [X, Y] \end{aligned}$$

Compatible con la métrica) Sean $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

$$\begin{aligned} g(F(X,Y),Z) + g(Y, F(X,Z)) &= g(\varphi_*^{-1}\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y, Z) + g(Y, \varphi_*^{-1}\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Z) \\ &= \varphi^* \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y, \varphi_* Z) + \varphi^* \widetilde{g}(\varphi_* Y, \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Z) \\ &= \varphi^* \big(\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Y, \varphi_* Z) + \widetilde{g}(Y, \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_* Z)\big) \\ &= \varphi^* \big(\varphi_* X \widetilde{g}(\varphi_* Y, \varphi_* Z)\big) \\ &= \varphi^* \big(\varphi_* X (\varphi^*)^{-1} g(Y, Z)\big) \\ &= Xg(Y, Z) \end{aligned}$$

□

A la conexión F de la prueba anterior, dada por $F(X,Y) = (\varphi_*)^{-1}(\nabla_{\varphi_* X}\varphi_* Y)$ se le conoce como *conexión de pullback* y está definida cuando φ es un difeomorfismo local. De esta manera podemos trasladar la conexión de una variedad M a un espacio euclidiano preservando sus propiedades. Luego, podemos definir una geodésica como:

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma} \quad = \quad 0$$

donde $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$ es una curva suave y $\frac{\nabla}{dt}$ denota la conexión de pullback de la conexión ∇ bajo γ.

2.2. Curvatura

Para definir una noción de curvatura nos gustaría tener una manera de comparar localmente una variedad Riemanniana con el espacio euclidiano $(\mathbb{R}^n(-,-))$, deonde $(-,-)$ es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$. Esta métrica es conocida como *la métrica plana.* Claramente las derivadas parciales ∂_μ son un marco global ortonormal. Ya vimos que las parciales conmutan, por lo que $\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu = 0$. y las derivadas parciales en $\mathbb{R}^n$ satisfacen Leibniz, es decir $\partial_\mu(Y,Z) = (\partial_\mu Y, Z) + (Y, \partial_\mu Z)$. Luego la conexión de Levi-Civita en el espacio euclidiano está dado simplemente por las derivadas direccionales, es decir $\bar{\nabla}_X Y = \sum_{\mu,\nu=1}^n X^\mu \bar{\nabla}_{\partial_\mu} Y^\nu \partial_\nu = \sum_{\mu,\nu=1}^n X^\mu \partial_\mu(Y^\nu)\partial_\nu = \sum_{\nu=1}^n X(Y^\nu)\partial_\nu$. En otras palabras, los símbolos de Christoffel de $\bar{\nabla}$ son $\Gamma_{\mu\nu}^\eta = 0$ para cada $\mu, \nu, \eta \in \{1, \ldots, ,\}$.

Para tener con que comparar, calculémos la conexión de Levi-Civita para la esfera S^2 dada por $x^2 + y^2 = R$ con $R > 0$. Tomando coordenadas esféricas polares

$$\begin{aligned} x(\theta, \varphi) &= R\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y(\theta, \varphi) &= R\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z(\theta, \varphi) &= R\cos\varphi \end{aligned}$$

donde $\theta \in, (0, 2\pi)$, $\varphi \in (0, \pi)$. Cambiando los dominios de θ y φ cubrimos toda la esfera. Tomando derivadas parciales, por la regla de la cadena obtenemos las siguientes ecuaciones para este sistema de coordenadas locales:

$$\begin{aligned} dx &= -R\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi\, d\theta + R\cos\theta \cos\varphi\, d\varphi \\ dy &= +R\cos\theta \operatorname{sen}\varphi\, d\theta + R\operatorname{sen}\theta \cos\varphi\, d\varphi \\ dz &= +R\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi \end{aligned}$$

Para calcular los coeficientes del tenso métrico g para la esfera inducida por $\mathbb{R}^3$, declaramos la carta local $(\theta, \varphi) \to (x(\theta\varphi), y(\theta, \varphi), z(\theta, \varphi))$ una isometría. Haciendo el cambio de variable obtenemos:

$$\begin{aligned} dx \otimes dx &= (-R\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi\, d\theta + R\cos\theta\cos\varphi\, d\varphi) \otimes (-R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\, d\theta + R\cos\theta\cos\varphi\, d\varphi) \\ &= (R^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi)\, d\theta \otimes d\theta + (R^2\cos^2\theta cos^2\varphi)\, d\varphi \otimes d\varphi \\ &- 2(R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)\, d\theta \otimes d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy \otimes dy &= (+R\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\, d\theta + R\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\, d\varphi) \otimes (+R\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\, d\theta + R\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\, d\varphi) \\ &= (R^2 cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\varphi) d\theta \otimes d\theta + (R^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi)\, d\varphi \otimes d\varphi \\ &+ 2(R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)\, d\theta \otimes d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz \otimes dz &= (+R\operatorname{sen}\varphi d\varphi) \otimes (+R\operatorname{sen}\varphi d\varphi) \\ &= (R^2\operatorname{sen}^2\varphi)\, d\varphi \otimes d\varphi \end{aligned}$$

Sumando $dx \otimes dx + dy \otimes dy$ los terminos cruzados se cancelan y obtenemos, al agrupar los términos iguales, que

$$\begin{aligned} dx \otimes dx + dy \otimes dy &= (R^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + R^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi) d\theta \otimes d\theta \\ &+ (R^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + R^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi)\, d\varphi \otimes d\varphi \\ &= R^2\operatorname{sen}^2\varphi\, d\theta \otimes d\theta + R^2\cos^2\varphi\, d\varphi \otimes d\varphi \end{aligned}$$

De manera que la métrica inducida en S^2 es

$$\begin{aligned} g &= dx\otimes dx + dy\otimes dy + dz\otimes dz \\ &= R^2\operatorname{sen}^2\varphi\, d\theta\otimes d\theta + (R^2\cos^2\varphi + R^2\operatorname{sen}^2\varphi)\, d\varphi\otimes d\varphi \\ &= R^2\operatorname{sen}^2\varphi\, d\theta\otimes d\theta + R^2\, d\varphi\otimes d\varphi \end{aligned}$$

Por lo que los coeficientes para la métrica de S^2 y sus inversos son:

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= R^2\operatorname{sen}^2\varphi & g_{\varphi\varphi} &= R^2 \\ g^{\theta\theta} &= \frac{1}{R^2\operatorname{sen}^2\varphi} & g^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

Y todos los demas son cero. Con lo que podemos calcular facilmente los símbolos de Christoffel para la conexión de Levi-Civita. Para este caso tenemos que $\Gamma^{\eta}_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{2}\frac{1}{2}g^{\lambda\eta}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}) = \frac{1}{2}g^{\eta\eta}(\partial_\mu g\nu\eta - \partial_\eta g_{\mu\nu} + \partial_n u g_{\eta\mu})$. Pero $g_{\varphi\varphi}$, $g_{\varphi\theta}$ y $g_{\theta\varphi}$ son constantes, por lo tanto $\partial_\mu g_{\varphi\varphi} = \partial_\mu g_{\varphi\theta} = \partial_\mu g_{\theta\varphi} = 0$ para $\mu = \varphi$, θ. Y, como $g_{\theta\theta}$ es independiente de θ, $\partial_\theta g_{\theta\theta} = 0$. En conclucion la única parcial que no se anula es $\partial_\varphi g_{\theta\theta} = -2R\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$.

$$\begin{aligned} \Gamma^{\theta}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(0) = 0. \\ \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_\theta g_{\varphi\theta} - \partial_\theta g_{\theta\varphi} + \partial_\varphi g_{\theta\theta} = \frac{1}{2R^2\operatorname{sen}^2\varphi}(2R^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} \\ \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\partial_\varphi g_{\varphi\theta} - \partial_\theta g_{\varphi\varphi} + \partial_\varphi g_{\theta\varphi} = 0 \\ \Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\partial_\theta g_{\theta\varphi} - \partial_\varphi g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\varphi\theta}) = \frac{1}{2R^2}(-2R^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) = -\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \\ \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\partial_\theta g_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi g_{\theta\varphi} + \partial_\varphi g_{\varphi\theta}) = 0 \\ \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\partial_\varphi g_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi g_{\varphi\varphi} + \partial_\varphi g_{\varphi\varphi}) = 0 \end{aligned}$$

Los únicos símobolos de Christoffel que no se anulan son $\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$ y $\Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} = -\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$. Algo notable de estos símbolos de Christoffel es la no simetría respecto a la base ortnonormal $\{\partial_\theta, \partial_\varphi\}$, esta falta de simetría se refleja en lo siguiente. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita de S^2,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta &= \Gamma^{\theta}_{\theta\theta}\partial_\theta + \Gamma^{\varphi}_{\theta\theta}\partial_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\partial_\varphi \\ \nabla_{\partial_\theta}\partial_\varphi &= \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi}\partial_\theta + \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\partial_\varphi = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\partial_\theta = \cot\varphi\partial_\theta \\ \nabla_{\partial_\varphi}\partial_\theta &= \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta}\partial_\theta + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}\partial_\varphi = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\partial_\theta = \cot\varphi\partial_\theta \\ \nabla_{\partial_\varphi}\partial_\varphi &= \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\partial_\varphi + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi}\partial_\varphi = 0 \end{aligned}$$

Lo que nos lleva a las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\theta}\nabla_{\partial_\varphi}\partial\theta &= \nabla_{\partial_\theta}\cot\varphi\partial_\varphi \\ &= \partial_\theta\big(\cot\varphi\big)\partial_\varphi + \cot\varphi\nabla_{\partial_\theta}\partial_\varphi \\ &= \cot^2\varphi\partial_\theta \end{aligned}$$

En cambio

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\varphi}\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta &= \nabla_{\partial_\varphi}\big(-\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\partial_\varphi big) \\ &= -\partial_\varphi\big(\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\big)\partial_\theta - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\theta \\ &= -\big(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi)\partial_\theta - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cot\varphi\partial_\theta \\ &= \big(\operatorname{sen}^2\varphi - \cos^2\varphi - \cos^2\varphi\big)\partial_\theta \\ &= \big(\operatorname{sen}^2\varphi - 2\cos^2\varphi\big)\partial_\theta \end{aligned}$$

Claramente $\nabla_{\partial_\theta}\nabla_{\partial_\varphi}\partial\theta \neq \nabla_{\partial_\varphi}\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta$. Se sigue que generalmente $\nabla_{\partial_\theta}\nabla_{\partial_\varphi}Z \neq \nabla_{\partial_\varphi}\nabla_{\partial_\theta}Z$. Considerando que una conexión es la generalización de segunda derivada direccional en variedades, podemos ver que una condición importante del espacio euclidiano es la conmutatividad de la conexión de Levi-Civita en cartas locales, es decir $\bar{\nabla}_{\partial_\mu}\bar{\nabla}_{\partial_\nu}Z = \bar{\nabla}_{\partial_\nu}\bar{\nabla}_{\partial_\mu}Z$. Por lo que la curvatura de una variedad Riemanniana se esconde detrás de la no conmutatividad de la conexión Riemanniana.

Para expresar esta no conmutatividad de manera independiente a coordenadas locales, calculemos $\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z$.

$$\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z = \sum_{\xi=1}^{n}\bar{\nabla}_X Y(Z^\xi)\partial_\xi = \sum_{\xi=1}^{n} XY(Z^\xi)\partial_\xi$$

Analogamente $\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z = \sum_{\xi=1}^{n} YX(Z^\xi)\partial_\xi$. Tomando la diferencia, encontramos que:

$$\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z = \sum_{\xi=1}^{n}\big(XY(Z^\xi) - YX(Z^\xi)\big)\partial_\xi = \sum_{\xi=1}^{n}[X,Y](Z^\xi)\partial_\xi = \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z$$

Por lo tanto la relación $\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z = \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z$ se mantiene para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$. Equivalentemente tenemos la siguiente igualdad:

$$\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla} X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z = 0$$

Por la naturalidad de la conexión de Levi-Civita, está relación se mantiene para cualquier variedad Riemanniana que sea localmente isométrica al espacio euclidiano.

Proposición 2.6. *Sea (M, g) variedad Riemanniana con conexión Riemanniana ∇. Si M es localmente isométrica al espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ entonces $\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z = 0$ para cualesquier X, Y, Z, $\in \Gamma(TM)$.*

Demostración. Se sigue de la naturalidad de ∇. □

Lo que motiva la siguientes definiciónes

Definición 2.9. Sea M variedad diferenciable y ∇ conexión sobre M. Decimos que ∇ es plana si satiface la ecuación

$$\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z = 0$$

Definición 2.10. Sea M variedad diferenciable y ∇ conexión lineal sobre M. Definimos el endomorfismo de curvatura

$$R: \quad \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM), \qquad (\,X\,,\,Y\,,\,Z\,) \longmapsto R_{X,Y}Z$$

por la siguiente fórmula:

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

En caso de una variedad Riemanniana tenemos como conexión lineal canónica la conexión de Levi-Civita.

Proposición 2.7. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Su endomorfismo de curvatura R satisface las siguientes propiedades:*

1. *R es antisimétrico en sus primeras dos entradas:* $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM)$ $R_{X,Y}Z = -R_{Y,X}Z$

2. *Es $C^\infty(M)$-lineal en cada entrada.*

3. *Identidad de Bianchi: $R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0$.*

Demostración. 1) directamente de la definición

$$\begin{aligned}
R_{X,Y}Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\\
&= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{-[Y,X]}Z\\
&= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[Y,X]}Z\\
&= -(\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]}Z\\
&= -R_{Y,X}Z
\end{aligned}$$

2) Al ser ∇ $\mathbb{R}$-lineal en ambas entradas R es automaticamente $\mathbb{R}$-lineal y, al ser antisimétrica en las dos primeras entradas, sólo es necesario verificar que, para $f \in C^\infty(M)$, $R_{fX,Y}Z = f\,R_{X,Y}Z = R_{X,Y}(fZ)$.

$$\begin{aligned}
R_{fX,Y}Z &= \nabla_f X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_f XZ - \nabla_{[fX,Y]}Z\\
&= f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\Big(f\nabla_X Z\Big) - \nabla_{f[X,Y]-Y(f)X}Z\\
&= f\nabla_X\nabla_Y Z - Y(f)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} + Y(f)\nabla_X Z\\
&= f\nabla_X\nabla YZ - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z\\
&= f\,R_{X,Y}Z
\end{aligned}$$

Para la segunda igualdad, calculamos primero $\nabla_X\nabla_Y fZ$.

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y fZ &= \nabla_X\Big(Y(f)Z + f\nabla_Y Z\Big)\\
&= \nabla_X Y(f)Z + \nabla_X f\nabla_Y Z\\
&= XY(f)Z + +Y(f)\nabla_X Z + X(f)\nabla_Y Z + f\nabla_X\nabla_Y Z
\end{aligned}$$

y analogamente:

$$\nabla_Y\nabla_X fZ = YX(f)Z + X(f)\nabla_Y Z + Y(f)\nabla_X Z + f\,\nabla_Y\nabla_X Z$$

Restando ambas igualdades obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y fZ - \nabla_Y\nabla_X fZ &= XY(f) - YX(f) + f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z\\
&= [X,Y](f)Z + f\nabla_x\nabla_Y Z - f\nabla_y\nabla_X Z
\end{aligned}$$

Ahora podemos calcular fácilmente

$$\begin{aligned}
R_{X,Y}fZ &= \nabla X\nabla YfZ - \nabla_Y\nabla XfZ - \nabla_{[X,Y]}fZ\\
&= [X,Y](f)Z + f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla XZ - [X,Y](f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z\\
&= f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z\\
&= f\,R_{X,Y}Z
\end{aligned}$$

3) De la definición de R y al ser la conexión libre de torción.

$$\begin{aligned}
R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&\quad + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X \\
&\quad + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_X\big(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y\big) + \nabla_Y\big(\nabla_Z X - \nabla_X Z\big) \\
&\quad + \nabla_Z\big(\nabla_X Y - \nabla_Y X\big) - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_X[Y,Z] - \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Y[Z,X] - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&\quad + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z[X,Y]] = 0
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad es la idendidad de Jacobi. □

Todo espacio vectorial V con producto escalar $(-,-) : V \times V \to \mathbb{R}$ tiene un isomorfismo natural entre V y su espacio dual V^* dado por $v \in V, v \longmapsto (v,-)$, donde la función $(v,-) : V \to V$ es *multiplicar por la izuiqerda* $(v,-)(w) = (v,w)$. Este concepto se extiende a variedades Riemannianas y campos vectoriales sobre estas de la siguiente manera. Sea TM el haz tangende de M. Definimos el haz cotangente como $T^*M = \coprod (T_pM)^*$ el coproducto de los espacios duales de T_pM.

Definición 2.11. Sea (M,g) una variedad Riemanniana. definimos la aplicación bemol

$$\flat : \quad TM \to T^*M, \qquad X \longmapsto g(\, X,\, -\,)$$

donde $g(X,-)(Y) := g(X,Y)$ es la aplicación *multiplicar por la izquierda* con el campo vectorial X.

El nombre bemol $\flat$ viene de que, si (U,x) es carta local, $\{\partial_\mu\}$ es marco local entonces denotamos por $\{dx^\mu\}$ el marco dual, es decir $\{dx^\mu_p\}$es base de T_pM^* definida por $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_{\mu\nu}$ la delta de Kronecker. Si $X = \sum_{\mu=1}^n X^\mu \partial_\mu$ entonces $\flat(X) = X^\flat = g(\sum_{\mu=1}^n X^\mu\partial_\mu, -) = \sum_{\mu=1}^n g(\partial_\mu, -) = \sum_{\mu,\nu=1}^n g_{\mu\nu}X^\mu dx^\nu$. Usualmente se suele denotar por $X_\nu := \sum_{\mu=1}^n g_{\mu\nu}X^\mu$, con esta notación obtenemos que $X^\flat = \sum_{\nu=1}^n X_\nu dx^\nu$. Es decir *bajamos* el índice de los coeficientes pasando de X^μ a X_μ. $\flat$ es un difeomorfismo con inversa $\sharp : T^*M \to TM$ definido por $\sharp(\omega) = \omega^\sharp = \sum_{\mu=1}^n \omega^\mu \partial_\mu$ donde $\omega = \sum_{\nu=1}^n \omega_\nu dx^\nu$ y $\omega^\mu = \sum_{\nu=1}^n g^{\mu\nu}\omega_\nu$, $g^{\mu\nu}$ son las entradas de la matriz inversa $(g_{\mu\nu})^{-1}$.

Definición 2.12. Sea (M,g) una variedad Riemanniana. Definimos el tensor de curvatura como $\mathscr{R} = R^\flat$, es decir

$$\mathscr{R} : \quad \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M) \qquad (X,\ Y,\ Z,\ W) \longmapsto g(R_{X,Y}Z, W)$$

Al ser g $C^\infty(M)$-bilineal y R $C^\infty(M)$-multilineal, $\mathscr{R}$ es $C^\infty(M)$-multilineal. Las propiedades básicas del tensor de curvatura son las siguientes simetrías:

Lema 2.8. *Sean* $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$

1. $\mathscr{R}(X,Y,Z,W) = -\mathscr{R}(Y,X,Z,W)$
2. $\mathscr{R}(X,Y,Z,W) = -\mathscr{R}(X,Y,W,Z)$
3. $\mathscr{R}(X,Y,Z,W) = \mathscr{R}(W,Z,X,Y)$

4. La identidad algebráica de Bianchi: $\mathscr{R}(X,Y,Z,W)+\mathscr{R}(Y,Z,X,W)+\mathscr{R}(Z,X,Y,W) = 0$

Demostración. 1) Directo de la antisimetría para el endomorfismo de curvatura $R_{X,Y} = -R_{Y,X}$

2) Primero noetmos que, como resultado de la compatibilidad de ∇ con la métrica, $\mathscr{R}(X,Y,Z,Z) = 0$.

$$\begin{aligned} XYg(Z,Z) &= X\big(2g(\nabla_Y Z,Z)\big) = 2g(\nabla_X\nabla_Y Z,Z) + 2g(\nabla_Y Z,\nabla_X Z) \\ YXg(Z,Z) &= Y\big(2g(\nabla_X Z,Z)\big) = 2g(\nabla_Y\nabla_X Z,) + 2g(\nabla_X Z,\nabla_Y Z) \\ [X,Y]g(Z,Z) &= 2g(\nabla_{[X,Y]}Z,Z) \end{aligned}$$

Restando la segunda y tercer igualaldad ed la primera, el lado izquierdo resulta cero, en el lado derecho $2g(\nabla_Y Z,\nabla_X Z)$ se cancela con $2g(\nabla_X Z,\nabla_Y Z)$ y así obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= 2g(\nabla_X\nabla_Y Z,Z) - 2g(\nabla_Y\nabla_X Z,Z) - 2g(\nabla_{[X,Y]}Z,Z) \\ &= 2g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,Z) \\ &= 2g(R_{X,Y}Z,Z) \\ &= 2\mathscr{R}(X,Y,Z,Z) \end{aligned}$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} 0 &= \mathscr{R}(X,Y,Z+W,Z+W) \\ &= \mathscr{R}(X,Y,Z,Z+W) + \mathscr{R}(X,Y,W,Z+W) \\ &= \mathscr{R}(X,Y,Z,Z) + \mathscr{R}(X,Y,Z,W) + \mathscr{R}(X,Y,W,Z) + \mathscr{R}(X,Y,W,W) \\ &= \mathscr{R}(X,Y,Z,W) + \mathscr{R}(X,Y,W,Z) \end{aligned}$$

4) La identidad algebráica de Bianchi es inmadiata de la identidad para el endomorfismo de curvatura $R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z.X}Y = 0$.

3) Esta es conde las otras tres simetrías: Primero escribimos la identidad algebráica de Bianchi 4 veces rotando de manera cíclica los campos.

$$\begin{aligned} \mathscr{R}(X,Y,Z,W) + \mathscr{R}(Y,Z,X,W) + \mathscr{R}(Z,X,Y,W) &= 0 \\ \mathscr{R}(Y,Z,W,X) + \mathscr{R}(Z,W,Y,X) + \mathscr{R}(W,Y,Z,X) &= 0 \\ \mathscr{R}(W,X,Y,Z) + \mathscr{R}(X,Y,W,Z) + \mathscr{R}(Y,W,X,Z) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando 2) a la primer columna obtenemos:

$$\begin{aligned} -\mathscr{R}(X,Y,W,Z) + \mathscr{R}(Y,Z,X,W) + \mathscr{R}(Z,X,Y,W) &= 0 \\ -\mathscr{R}(Y,Z,X,W) + \mathscr{R}(Z,W,Y,X) + \mathscr{R}(W,Y,Z,X) &= 0 \\ -\mathscr{R}(Z,W,Y,X) + \mathscr{R}(W,X,Z,Y) + \mathscr{R}(X,Z,W,Y) &= 0 \\ -\mathscr{R}(W,X,Z,Y) + \mathscr{R}(X,Y,W,Z) + \mathscr{R}(Y,W,X,Z) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando estas cuatro igualdades, la primer oclumna se cancela con la segunda columna.

$$\mathscr{R}(Z,X,Y,W) + \mathscr{R}(W,Y,Z,X) + \mathscr{R}(X,Z,W,Y) + \mathscr{R}(Y,W,X,Z) = 0$$

aplicando 1) y 2) a los dos primeros términos y despejando nos queda:

$$2\mathscr{R}(X,Z,W,Y) = -2\mathscr{R}(Y,W,X,Z)$$

aplicando 1) al lado derecho de la igualdad, terminamos. □

4-tensores (aplicaciones C^∞-multilineales con 4 entradas) como el tensor de curvatura suelen ser bastante complicados de manejar, para eso se suelen construír tensores más simples que resuman la información. Probablemente el más importante de estos es el tensor de Ricci:

Definición 2.13.

$$\mathrm{Ric}(\, X,\, Y\,) \;=\; \mathrm{tr}_g(\, \mathscr{R}\,(\, X,\; Y\,)\,) \;:=\; \sum_{\mu=1}^{n} \mathscr{R}(E_\mu, X, Y, E_\mu)$$

donde $\{\, E_\mu \,\}$ es un marco ortonormal respecto a g.

Notemos que, por las simetrías del tensor de curvatura, el tensor de Ricci es simétrico, pues $\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{\mu=1}^n \mathscr{R}(E_\mu, X, Y, E_\mu) = \sum_{\mu=1}^n \mathscr{R}(Y, E_\mu, E_\mu, X) = \sum_{\mu=1}^n \mathscr{R}(E_\mu, Y, X, E_\mu) = \mathrm{Ric}(Y,X)$.

Definición 2.14. La curvatura escalar $\kappa : M \to \mathbb{R}$ se define como la traza sobre g del tensor de Ricci:

$$\kappa \;:=\; \mathrm{tr}_g(\,\mathrm{Ric}\,) \;=\; \sum_{\mu=1}^{n} \mathrm{Ric}(\, E_\mu,\; E_\mu\,)$$

donde $\{\, E_\mu \,\}$ es un marco ortonoromal.

Estas son los 3 conceptos principales de curvatura para una variedad Riemanniana: El tensor de curvatura $\mathscr{R}$, el tensor de Ricci Ric y la curvatura esca;ar κ.

Una métrica Riemanniana se dice que es una métrica de Einstein cuando el tensor de Ricci es un múltiplo de la métrica en cada punto. Es decir hay $\lambda \in C^\infty(M)$ tal que $\mathrm{Ric} = \lambda g$. Si tomamos la traza sobre g de ambos lados, notando que

$$\mathrm{tr}_g g \;=\; \sum_{\mu=1}^{n} g(\, E_\mu,\; E_\mu\,) \;=\; \sum_{\mu=1}^{n} 1 \;=\; n \;=\; \dim\, M$$

Encontramos que necesariamente $\lambda = \frac{1}{n}\kappa$, por lo que podemos escribir la condición de Einstein como:

Definición 2.15. (M, g) es una variedad de Einstein si y sólamente se satisface la igualdad

$$\mathrm{Ric} \;=\; \frac{\kappa}{n} g$$

Referencias

[1] John M. Lee: *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Graduate Texts in Mathematics 176.

[2] Artur L. Besser: *Einstein Manifolds*, Classics in Mathematics, Berlin, Springer, 1987.