Grupos de Homotopía

Proyecto II Verano de Invetigación 2017

Autor: Rubén Niño López
Tutor: Dr. José Luis Cisneros Molina

Índice

Agradecimientos

El presente trabajo fue realizado en el verano de investigación del Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca en 2017. Agradezco al *Programa para un Avance Global e Integrado de la Matemática Mexicana*, proyecto FORDECYT, clave 265667. También quisiera agradecer a mi asesor durante mi estancia en el Instituto de Matemáticas Unidad Cuernavaca, Dr. José Luis Cisneros, así como a los organizadores del verano de investigación.

1. Introducción.

Los grupos de homotopía representan uno de los temas fundamentales dentro de la topología algebraica.

El presente trabajo tiene el objetivo de mostrar el uso de los grupos de homotopía como herramienta para conocer la forma o estructura de un espacio topológico, para ello se estudiaron algunos de los conceptos básicos dentro de la *Topología Algebraica*, así como otras áreas de las matemáticas, como la Topología, Teoría de Grupos y Teoría de Categorías.

En el primer bloque (Preliminares), se enuncian las definiciones básicas de cada una de las áreas matemáticas utilizadas y que nos generan una idea de como trabajaremos con los grupos de homotopía.

En el siguiente bloque se ve la definición de homotopía, concepto clave del trabajo, y se muestra el grupo de Poincare, uno de los primeros invariantes topologicos que nos ayudan a comprender a un espacio topológico.

En el último bloque se presenta la parte más importante del trabajo, ya que mostramos y explicamos los objetos matemáticos que generan a los grupos de homotopía y nos permiten obtener una visión más completa de su uso en el quehacer matemático.

2. Preliminares

2.1. Álgebra

Definición 2.1. Sea G un conjunto distinto del vacío y $\star$ una operación binaria dentro de G, es decir

$$\star\colon G \times G \to G$$

donde $\star(x,y) = x \star y$. Decimos que $(G,\star)$ es un ***grupo*** si se satisfacen las siguientes condiciones:

i) La operación $\star$ es asociativa, i.e., $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.

ii) Existe un único elemento $e \in G$ tal que $e \star x = x = x \star e$

iii) Para cada $x \in G$, existe un unico elemento $b \in G$ tal que $b \star a = e = a \star b$. Nota: $b = a^{-1}$.

Definición 2.2. Si $(G,*)$ y $(H,\circledast)$ son grupos, entonces una función $f\colon G \to H$ es un ***homomorfismo*** si $f(g_1 * g_2) = f(g_2) \circledast f(g_2)$ para toda $g_1, g_2 \in G$. Si f es una biyeccion entonces llamamos a f un ***isomorfismo***. Esto lo denotamos por $G \cong H$.

2.2. Topología

Definición 2.3. Sea $\{X_\lambda | \lambda \in\}$ una familia de espacios topológicos. Al supremo de las topologías en $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ inducidas por las proyecciones $p_\lambda\colon X \to X_\lambda$ se le llama ***topología del producto***, y a X con esta topología se le llama ***producto topológico*** de la familia de las X_λ y se le denota usualmente como $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Definición 2.4. Si (X,τ) y (Y,σ). $C(X,Y)$ denotara el conjunto de funciones continuas de (X,τ) a (Y,σ). Si $A \subset X$ y $B \subset Y$ entonces

$$(A,B) = \{f \in C(X,Y) | f(A) \subset B\}$$

Definición 2.5. La topología ***compacto-abierta*** de $C(X,Y)$, que denotamos por τ_{ca}, es la que tiene como subbase a $\gamma = \{(K,U) | K \subset X$ es compacto y $U \subset Y$ es abierto $\}$.

Definición 2.6. Sea (X,τ) un espacio topológico y $U,V \in \tau$. Se dice que la pareja (U,V) es una ***separación*** o ***disconexión*** de X, si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $U \neq \varnothing$ y $V \neq \varnothing$

2. $U \cap V = \varnothing$

3. $X = U \cup V$

Diremos que un espacio topológico X es disconexo si existe una separación de X.

Definición 2.7. Se dice que un espacio topológico X es ***conexo*** si no existe ninguna separación de X.

Definición 2.8. El conjunto $C_x = \{C \subset X | x \in C, C conexo\}$ es conexo y es el conexo más grande que contiene a x. Al subconjunto C_x se le llama ***componente conexa*** de X correspondiente a x.

Observación 1. Si $y \in C_x$, entonces $C_y = C_x$.

Lema 2.9. *Si $X = A \cup B$ con A, B cerrados en X entonces $f \colon X \to Y$ es continua $\Leftrightarrow$ $f|_A$ y $f|_B$ lo son.*

A este lema se le conoce como el *lema del pegado* porque f es el resultado de pegar las funciones $f|_A$ y $f|_B$.

2.3. Categorías

Definición 2.10. Una categoría $\mathcal{C}$ consiste o tiene las siguientes propiedades:

i) Tiene una colección $ob(\mathcal{C})$ de objetos

ii) Por cada $A, B \in ob(\mathcal{C})$, hay una colección $\mathcal{C}(A, B)$ de mapas, flechas o morfismos de A a B.

iii) Por cada $A, B, C \in ob(\mathcal{C})$, hay una función

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(B, C) \times \quad \mathcal{C}(A, B) &\to \mathcal{C}(A, C) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

llamada composición.

iv) Por cada $A \in ob(\mathcal{C})$, hay un elemento 1_A de $\mathcal{C}(A, A)$, llamada la identidad en A, que satisface las siguientes propiedades:

   •) Asociatividad: Por cada $f \in \mathcal{C}(A, B), g \in \mathcal{C}(B, C)yh \in \rfloor(C, D)$ tenemos $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

••) Leyes de identidad: Por cada $f \in \mathcal{C}(A, B)$, tenemos

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

Observación 2. Algunas observaciones sobre notación son:

Se suele escribir $A \in \mathcal{C}$ en vez de $A \in ob(\mathcal{C})$.

De igual manera $f \colon A \to B$ en vez de $f \in \mathcal{C}(A, B)$.

También podemos encontrar que $\mathcal{C}(A, B)$ se llega a escibir como $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ o simplemente como $Hom(A, B)$. La notación "Hom"se interpreta como homomorfismo, se adopoto así por uno de los primeros ejemplos que hubo de categorías.

Ejemplo 2.11. Estos ejemplos son tomados del libro [Basic Category Theory], se ponen en este trabajo por parecer ilustrativos.

a) La categoria **Set** que se describe como sigue. Sus objetos con conjuntos. Dados los conjuntos A y B, un mapa de A a B en la categoría **Set** es exactamente lo que ordinariamente conocemos como función A en B. La composición es la composición común entre funciones. Y la identidad es la identidad de funciones.

b) Tenemos también la categoría de grupos **Grp**, cuyos objetos son los grupos y sus mapas los homomorfismos.

c) La categoría **Top**, conformada por espacios topologicos y mapas continuos.

d) Tambien tenemos las categorías de anillos **Ring** y la de espacios vectoriales $\mathbf{Vect}_k$.

Los ejemplos b) y c) son el enfoque principal de este trabajo, ya que nuestra área de trabajo es la Topología Algebraica, que combina herramientas de topología con herramientas de Álgebra.

2.3.1. Funtores

Una herramienta dentro de las categorias son los *funtores*. Estos nos ayudan a encontrar respuestas más accesibles en el tratamiento de las matemáticas actuales. Pues es común que en el trabajo de encontrar mapeos entre objetos matemáticos, no se halle una respuesta de facil acceso. Al hacer esta pregunta dentro las categorías nos encontramos con el concepto de *funtor*.

Definición 2.12. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos categorías. Un funtor $F\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ consiste de:

1) Una función
$$ob(\mathcal{C}_1) \to ob(\mathcal{C}_2)$$
escrito como $A \mapsto F(A)$.

2) Por cada $A, B \in \mathcal{C}_1$, hay una función
$$\mathcal{C}_1(A,B) \to \mathcal{C}_2(F(A), F(B))$$
escrito como $f \mapsto F(f)$.

que satisface los siguientes axiomas:

- •) $F(f \circ f') = F(f') \circ F(f)$ cuando
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f'} C$$
en $\mathcal{C}_1$.
- •) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ cuando $A \in \mathcal{C}_1$.

Ejemplo 2.13. Uno de los primeros ejemplos surgió gracias a otra área de las matemáticas, la topología algebraica. Aquí se comenzaron a usar herramientas de la teoría de categorías.

La idea era aprender sobre los espacios topologicos mediante datos que se encontraban dentro de ellos, acomodandolos dentro de una estructura algebraica, así podríamos estudiar la estructura algebraica de manera accesible en lugar del espacio topologico.

El grupo fundamental de un espacio topológico, $\pi_1(X,x)$, fue este gran avance. Del cual hablaremos más adelante de él.

Existe otra manera alternativa para trabajar con los funtores, y es aquí donde entra la definición de funtor covariante, dejando a la primer definición como *funtor contravariante.*

Definición 2.14. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ categorías. Un **funtor covariante** $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es una asignación de un objeto $T(C) \in \mathfrak{D}$ para cada $C \in \mathfrak{C}$ y un morfismo $T(\alpha) \in Hom_{\mathfrak{D}}[T(C), T(C')]$ para cada morfismo $\alpha \in Hom_{\mathfrak{C}}[C, C']$, tal que:

1. Preserva la composición, i.e., si $\alpha'\alpha$ está definida en $\mathfrak{C}$ entonces
$$T(\alpha'\alpha) = T(\alpha')T(\alpha)$$

2. Preserva las identidades, i.e., para cada $C \in \mathfrak{C}$ se tiene que $T(1_C) = 1_{T(C)}$.

3. Homotopía

Existen distintos tipos de invariantes topológicos, los cuales nos ayudan a identificar si un espacio X es o no homeomorfo a otro espacio Y. Algunos de ellos pueden ser la compacidad, conexidad, etc. En esta sección hablaremos de las propiedades básicas de homotopía, que nos ayudara a descubrir si dos espacios son homeomorfos, o no. Para esto trataremos de ser claros en la exposición.

Definición 3.1. Sean X y Y dos espacios topológicos. Se dice que dos aplicaciones continuas $f\colon X \to Y$ y $g\colon X \to Y$ son **homotópicas** si existe una aplicación continua

$$F\colon X \times I \to Y$$

talque

$$\begin{aligned} F(x,0) &= f(x) \\ F(x,1) &= g(x) \end{aligned}$$

.

Llamaremos a la aplicación F una **homotopía** entre f y g y la denotaremos como $f \simeq g$ o también como $F\colon f \simeq g$.

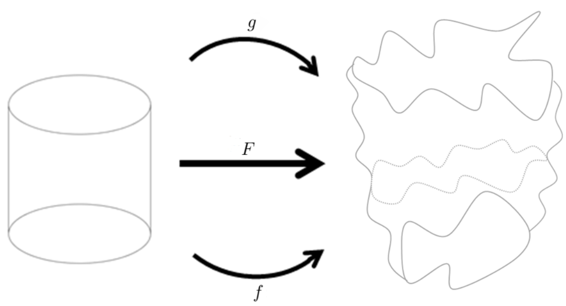

Figura 1: Homotopía

Proposición 3.2. *$\simeq$ es una relación de equivalencia en X.*

Demostración. Probaremos las propiedades de relación de equivalencia.

i) Sea $f\colon X \to Y$, naturalmente $f \simeq f$. Tomemos la aplicación

$$F(x,t) = f(x), \forall t \in I$$

. F es la homotopía requerida, ya que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = f(x)$.

ii) Sea $g\colon X \to Y$. Supongamos que $f \simeq g$, por lo que falta demostrar que $g \simeq f$. Sea $F\colon X \times I \to Y$ una homotopía entre f y g. Definimos una nueva aplicación $G\colon X \times I \to Y$ tal que $G(x,t) = F(x, 1-t)$, entonces G resulta ser una homotopía entre g y f. Ya que es como ir "de regreso"de lo que hace la aplicación g a lo que hace la aplicación f.

iii) Sea $h\colon X \to Y$ una nueva aplicación. Supongamos que $f \simeq g$ y que $g \simeq h$. Demostremos que $f \simeq h$. Sean F una homotopía entre f y g y G otra homotopía entre g y h. Definamos ahora $H\colon X \times I \to Y$ por la ecuación:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{para} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t-1) & \text{para} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Tenemos que la aplicación H esta bien definida ya que, para $t = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$F(x, 2t) = g(x) = G(x, 2t-1)$$

Puesto que H es continua en los dos subconjuntos cerrados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ de $X \times I$, entonces H es continua en todo $X \times I$, esto por el lema del pegado.

Por lo tanto, H es la homotopía que necesitamos entre f y h.

□

Definición 3.3. Las clases de equivalencia, denotadas por $[x]$, dividen a X en subconjuntos disjuntos llamados componentes por caminos de X. Sea $\pi_0(X)$ el conjunto de clases de equivalencia.

Definición 3.4. Sean X y Y dos espacios topologicos.

I) Sea $f\colon X \to Y$ una función continua; f es una equivalencia homotópica si existe una función continua $g\colon Y \to X$ tal que $f \circ g \simeq 1_Y$ y $g \circ f \simeq 1_X$. Decimos que la funcion g es inversa homotópica de f.

II) X y Y se dicen del mismo tipo homotópico si existe $f\colon X \to Y$ una equivalencia homotópica.

III) Decimos que X es *contractil* si es del mismo tipo homotópico de un punto, i.e., podemos reducir a X a un punto mediante una homotopía.

Definición 3.5. Sea $A \subset X$ un subespacio y $f, g\colon X \to Y$ continuas, tales que $f|_A = g|_A$. Diremos que f es homotópica a g relativo al subespacio A si existe una homotoía $H\colon X \times I \to Y$ que verifica $H(a,t) = f(a) = g(a)$ para cada $a \in A$, $t \in I$.

Notamos esto como $f \simeq_{relA} g$.

Definición 3.6. Sea $A \subset X$ un subespacio topologico.

△. Diremos que la inclusion $i\colon A \hookrightarrow X$ en la categoría Top es un *retracto* si existe una función $r\colon X \to$ continua, tal que $r \circ i = 1_A$, es decir, $r(a) = a$ para todo $a \in A$.

△. Llamaremos *retracto por deformación* a un retracto $i\colon A \to X$ para el cual podemos ver que $i \circ r \simeq 1_X$. Es decir, existe una homotópia entre $i \circ r$ y 1_X, a decir $H\colon X \times I \to X$, donde $H(x, 0) = i \circ r(x)$ y $H(x, 1) = x$ para todo $x \in X$.

△. Diremos que $i\colon A \to X$ es un *retracto por deformación fuerte* si cumple con ser un retracto por deformación y además $i \circ r \simeq_{relA} 1_X$. Esto nos quiere decir que todos los puntos de A quedan fijos bajo la acción de la homotopía.

3.1. Grupo Fundamental

Vamos a introducir el *Grupo Fundamental*, que se menciono en el ejemplo 2.13. Para ello comenzaremos con algunas definiciones que nos van a servir durante el camino.

Definición 3.7. Sea X un espacio topologico, y $a, b \in X$ dos puntos. Sea $\alpha\colon I \to X$ un mapeo continuo, decimos que α es un **camino** en X si $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$.

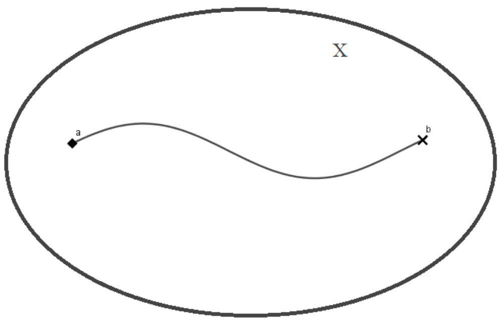

Figura 2: Un camino α, en X, que une el punto a con b.

Definición 3.8. Se dice que dos caminos, α y β, son qeuivalentes, si α y β son homotópicos relativamente a $0, 1$. Lo cual se denota por $\alpha \sim \beta$. Es decir, α y β son equivalentes si existe $F\colon I \times I \to X$ continua tal que

$$\begin{array}{lll} F(t,0) = \alpha(t), & F(t,1) = \beta(t) & t \in I \\ \alpha(0) = F(0,s) = \beta(0), & \alpha(1) = F(1,s) = \beta(1) & s \in I \end{array}$$

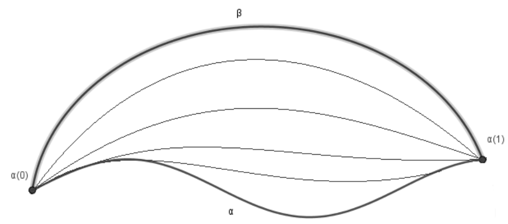

Figura 3: Dos caminos, α y β, homotópicamente relativos.

Dados dos caminos $\alpha, \beta\colon I \to X$ tal que $\alpha(1) = \beta(0)$, es decir, el final de uno sea el inicio del otro, podemos definir la *composición o producto de caminos* $\alpha \cdot \beta$ como:

$$\alpha \cdot \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{para} \quad s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2s-1) & \text{para} \quad s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Ahora supongamos que tenemos un camino $\gamma\colon I \to X$ que tiene la peculiaridad de comenzar y terminar en el mismo punto, es decir, $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$. Este tipo de caminos son llamados *lazos* y el punto x_0 es llamado el *punto base*.

El conjunto que contiene las clases de homotopia de los lazos de un espacio topologico X por el punto x_0 es denotado por $\pi_1(X, x_0)$.

Proposición 3.9. *$\pi_1(X, x_0)$ es un grupo con respecto al producto*

$$[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta]$$

.

Demostración. Probaremos las propiedades de grupo.

- Primero probaremos que la operación entre lazos es asociativa.

$$((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & \text{para} \quad t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \beta(4t-1) & \text{para} \quad t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1) & \text{para} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

y

$$(\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{para} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(4t-2) & \text{para} \quad t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma(4t-3) & \text{para} \quad t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Estas son dos formas de recorrer el producto de los lazos, ahora tenemos que encontrar la homotopía entre ambos. Entonces tomamos un $s \in I$

tal que cuando $s = 0$ recorremos $((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)$ y cuando $s = 1$ pasamos por $(\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma))$

Esto último lo podemos apreciar en la Figura 4.

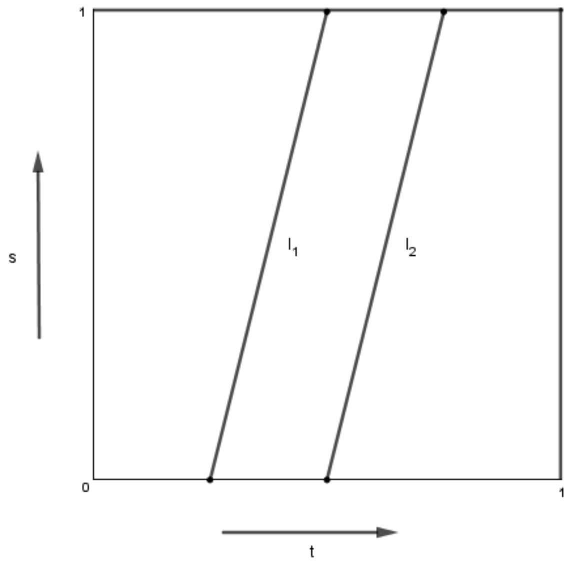

Figura 4:

$$F(t,0) = \begin{cases} \alpha(4t) & \text{para} \quad t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \beta(4t-1) & \text{para} \quad t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1) & \text{para} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

y

$$F(t,1) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{para} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(4t-2) & \text{para} \quad t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma(4t-3) & \text{para} \quad t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

con

$$F(0,s) = \alpha(0)$$

$$F(1,s) = \gamma(1)$$

Por lo que $((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) = (\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma))$, es decir, el producto es asosiativo.

- Dado un camino $\alpha \colon I \to X$, tomamos el camino constante ε sobre $\alpha(1)$, definida por $\varepsilon(t) = \alpha(1)$ para toda $t \in I$. Entonces:

$$\alpha \cdot \varepsilon(t) = \begin{cases} 2t & \text{en} \quad [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{en} \quad [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Por tanto $\alpha \cdot \varepsilon \simeq \alpha$

De igual manera lo podemos hacer con $\varepsilon \cdot \alpha \simeq \alpha$

Además con esto tenemos que la clase de equivalencia de los caminos constantes en x_0 es la identidad dentro del grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$.

- Suena logico pensar que para un camino α de x_0 a x_1, el camino inverso $\bar{\alpha}$ sea de x_1 a x_0. Y lo podemos definir como $\bar{\alpha} = \alpha(1-t)$.

$\square$

Ejemplo 3.10. El ejemplo predilecto, tal vez por lo sencillo de ver, para comenzar a usar y entender el grupo fundamental es la circunferencia: este es isomorfo al grupo aditivo de los números enteros $\mathbb{Z}$. El número entero que se le asigna a cada lazo de S^1 es el número de vueltas que el lazo da al rededor de la circunferecia.

4. Grupos de Homotopía

Con esta sección queremos presentar el trabajo del que trata este documento. Aqui hablaremos sobre los *grupos de homotopía*. Estos sirven para comprender mejor como es un espacio topológico y ayudarnos a clasificarlos por sus caracteristicas. El primer grupo de homotopía es el grupo fundamental, del que ya se hablo un poco, este registra información sobre las familias de curvas cerradas en un espacio. El grupo de homotopía de orden n, se puede definir como el conjunto de los mapas de una esfera n-dimensional S^n sobre un espacio X con un punto base x_0.

Algunas veces para estudiar los objetos nos tendremos que fijar en la *categoría* de dichos objetos, y asociarle a cada objeto de esta categoría un objeto que todavia conserve información sobre el objeto que se quiere estudiar. Para esto, los grupos de homotopía son una manera de asociar los grupos a la categoría de espacios topológicos.

4.1. Suspensión

Definición 4.1. Sea X un espacio topológico con punto base x_0. Definimos la suspensión de X como el espacio cociente $\Sigma X = IX/_\sim$

donde $\sim$ es la relacion dada por: $(x,t) \sim (x',t')$ si $t = 0 = t'$ o $t = 1 = t'$ o $(t = t'$ y $x = x')$

También notemos que la suspensión define el funtor $\Sigma\colon Top \to Top$ que hace corresponder a cada X en Top el objeto ΣX y a cada mapeo continuo $f\colon X \to Y$ el morfismo $\Sigma f\colon \Sigma X \to \Sigma Y$ definido por: $\Sigma f[(x,y)] = [(f(x),t)]$.

Un resultado que nos ayuda durante nuestro camino para obtener el resultado esperado es el siguiente.

Proposición 4.2. $\Sigma S^{n-1} = S^n$ *para toda* $n \geq 1$.

Demostración. Sea $\varphi\colon \Sigma S^{n-1} \to S^n$ con la regla de correspondencia

$$\varphi([x,t]) = (2\sqrt{t(1-t}x, 2t-1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

φ esta bien definida pues $\varphi([x,0)] = (0,\dots,0,-1) = \varphi[(x',0)]$ y también $\varphi([x,1)] = (0,\dots,0,1) = \varphi[(x',1)]$.

Además φ cumple con ser biyectiva y continua, y como ΣS^{n-1} es un compacto y S^n Hausdorff, entonces φ es un homeomorfismo. □

Definición 4.3. Sea X espacio topologico punteado, donde x_0 es su punto base. Definimos la *suspension reducida* $\sum X$ como el cociente

$$\Sigma X = X \times I/_{X\times\{0\}\cup X\times\{1\}\cup\{x_0\}\times I}$$

Con esta definicion tenemos el siguiente resultado.

Definición 4.4. $\Sigma S^n = S^{n+1}$ para $n \geq 0$.

4.2. H-espacios

Vamos a hablar aquí sobre una estructura que es un tanto más debil que la estructura de grupo

Definición 4.5. Un grupo topologico es un espacio topologico punteado (G,e) con una multiplicación continua $\mu\colon G \times G \to G$ y con una inversa continua $\nu\colon G \to G$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "{(\nu,1_G)}"] \arrow[dr, "\star_e"'] & G \times G \arrow[d] & G \arrow[l, "{(1_G,\nu)}"'] \arrow[dl, "\star_e"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Definición 4.6. Sea (G,e) un espacio topológico punteado con multiplicación continua $\mu\colon G \times G \to G$ donde (e,e) es el punto base de $G \times G$. Entonces decimos que:

· (G,e) es un H-espacio si $\star\colon G \to G$ es una identidad homotópica

· (G,e) es un H-grupo si μ es homotopicamente asociativo, $\star_e\colon G \to G$ es una identidad punteada y homotópica, y μ es una inversa punteada y homotópica.

· (G,e) es un H-grupo abeliano si el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mu"] & & G \times G \arrow[dl, "\mu"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Proposición 4.7. *Sean (X,x_0) un espacio topológico punteado e (Y,y_0) un H-grupo. Entonces el conjunto $[X,Y]$ admite una estrucutura de grupo. Además si Y es un H-grupo abeliano, entonces $[X,Y]$ es un grupo abeliano.*

4.3. Espacios de Lazos

Una vez visto que los grupos topológicos son H-espacios, nos disponemos a ver otro ejemplo. Se trata del *espacio de lazos* de espacio topológico punteado.

Si (Y,y_0) es un espacio punteado, tenemos que su espacio de lazos $\Omega(Y,y_0)$ es un espacio de lazos punteado, con el lazo constante $\bar{y_0}(t) = y_0$ para toda $t \in I$.

Además el espacio de lazos $\Omega(Y,y_0)$ tiene estructura de H-grupo, donde la multiplicación la podemos ver como:

$$\mu\colon \Omega Y \times \Omega Y \to \Omega Y$$

tal que para lazos $\alpha, \beta \in \Omega Y$, tenemos:

$$\mu(\alpha,\beta) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{para} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{para} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

El H-inverso está dado por $j\colon \Omega \to \Omega$ donde $j(\alpha)(t) = \alpha(1-t)$.

Teorema 4.8. *Para todo espacio punteado Y, ΩY es un H-grupo y por lo tanto, para todo espacio punteado X, $[X,\Omega Y]_*$ es un grupo. Si $f\colon X \to X'$ es continua, entonces*

$$f\colon [X', \Omega Y]_* \to [X, \Omega Y]_*$$

es un homomorfismo.

Si $g\colon Y \to Y'$ es una aplicación punteada, entonces $\Omega\colon \Omega Y \to \Omega Y'$ dada por la restricción $g_\sharp\colon M(X,Y) \to M(X,Z)$ con $f \mapsto g \circ f$, es un H-homomorfismo. Entonces

$$(\Omega g)_*\colon [X, \Omega W]* \to [X, \Omega W']_*$$

es un homomorfismo de grupos.

Proposición 4.9. *Si (X, x_0) es un espacio topológico punteado entonces ΩX es un H-grupo.*

Corolario 4.10. *Sean X y Y dos esapacios topologicos punteados, entonces $[X, \Omega Y]$ es un grupo.*

Ahora vamos a introducir el concepto dual del producto cartesiano de espacios punteados.

Definición 4.11. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) dos espacios punteados. El producto cartesiano de los dos espacios es también un espacio punteado, $(X \times Y, (x_0, y_0))$, el *coproducto reducido* o *suma cuña* $X \vee Y$ como un subespacio de $X \times Y$.

$$X \vee Y = \{(x,y) \in X \times Y | x = x_0 \text{ y } y = y_0\}$$

es decir, $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subset X \times Y$.

Dadas las aplicaciones $f\colon X \to Z$ y $g\colon Y \to Z$, el producto cuña tiene las siguientes propiedades, entonces tenemos una palicación punteada

$\langle f, g\rangle\colon X \bigvee Y \to Z$ dada por

$$\langle f, g\rangle(x,y) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad y = y_0 \\ g(y) & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

Si $f\colon X \to X'$ y $g\colon Y \to Y'$ son aplicaciones punteadas, que juntas definen una aplicación punteada:

$$f \vee g\colon X \vee Y \to X' \vee Y$$

dada por

$$(f \vee g)(x,y) = (f(x), g(y))$$

.

Proposición 4.12. *Sea (X, x_0) un espacio topologico punteado, entonces ΣX es un H-cogrupo.*

Proposición 4.13. *Sean* (Y, y_0) *un espacio topológico punteado y* (X, x_0) *un* H*-cogrupo. Entonces el conjunto* $[X, Y]$ *admite una estructura de grupo. Además si* X *es un* H*-grupo abeliano, entonces* $[X, Y]$ *es un grupo abeliano.*

Corolario 4.14. *Sean* X *y* Y *dos espacios topologicos punteados , entonces* $[\Sigma X, Y]$ *es un grupo.*

Proposición 4.15. $\varphi\colon [\Sigma X, Y] \to [X, \Omega Y]$ *es un isomorfismo de grupos.*

4.4. Ley Exponencial

Sea $F\colon X \times I \to Y$ una hompotopía entre f_0 y f_1 $(f_0, f-1\colon X \to Y)$. Definimos la aplicación

$$f_t\colon X \to Y, t \in I$$
$$f_t(x) = F(x, t)$$

la cual es continua. Tenemos que $M(X, Y)$ es el conjunto de aplicaciones continuas de X a Y, entonces definimos el mapeo:

$$\alpha\colon I \to M(X, Y)$$
$$t \mapsto f(t)$$

, tal que $\alpha(0) = f_0$ y $\alpha(1) = f_1$, es decir, pareciera que tenemos un camino dentro del espacio de funciones.

Sea X, Y dos conjuntos tal que $Y \neq \emptyset$, entonces

$$Y^X = \prod_{x \in X} Y = \{f\colon X \to Y\}.$$

Observación 3. Si $X = \emptyset$, entonces el conjunto $Y^{\emptyset}$ es un conjunto unitario.

Si Y fuera un espacio topologico, entonces a Y^X podríamos asignarle la topologia producto en $\prod_{x \in X} Y$.

Sean X y Y espacios topologicos , $Y \neq \emptyset$, definimos $M(X, Y) = \{f \in X^Y | f escontinua\}$.

Definimos la aplicación *evaluación* como:

$$e\colon Y^X \times X \to Y$$
$$(f, x) \mapsto f(x)$$

y si la restringimos queda como:

$$e\colon M(X,Y)\times X\to Y$$
$$(f,x)\mapsto f(x)$$

Entonces llamaremos a una topología en $M(X,Y)$ como admisible, si la evaluación es continua con respecto a dicha topología.

Una posible topología en $M(X,Y)$ que se fija en la topología de X y la de Y y que generaliza a la topología producto es la topología compacto-abierta.

Por lo que definimos lo siguiente.

Definición 4.16. Sean (X,x_0) y (Y,y_0) dos espacios topologicos con punto base. Definimos el subespacio

$$(Y,y_0)^{(X,x_0)}=\{f\in Y^X|f(x_0)=y_0\}\subset Y^X$$

como el espacio de funciones con la topología compacto-abierta.

La topología compacto-abierta en $M(X,Y)$ es la generada por los subbásicos

$$U^K\{f\in M(X,Y)|f(K)\subset U\}$$
$$=((\prod_{k\in K}U)\times\prod_{k\notin K}Y)\cap M(X,Y))$$

donde K es compacto en X y U es a abierto en Y.

4.5. Adjunción

hablaremos ahora de otra estructura que relaciona las estructuras de grupo que se definen en los conjuntos de clases de homotopía usando espacios de lazos y suspensiones expresada en la siguiente proposición.

Proposición 4.17. *Hay un homeomorfismo $M(\Sigma X,Y)\cong M(X,\Omega Y)$ tal que la biyección inducida $[\Sigma X,Y]_*\cong[X,\omega Y]$ es un isomorfismo de grupos.*

Sean Q un H-cogrupo y W un H-grupo. Entonces obtenemos una estructura de grupo en $[Q,W]_*$

Lema 4.18. *Sea G un conjunto equipado con dos operaciones tales que:*

1. *tienen una unidad bilateral común, e:*

$$e\odot x=x\odot e=x=e\otimes x=x\otimes e$$

.

2. son mutuamente distributivas, i. e.,

$$(x \odot y) \otimes (w \odot z) = (x \otimes w) \odot (y \otimes z)$$

.

Proposición 4.19. *Las dos estructuras de grupoen $[Q, W]_*$ coinciden y ambas son conmutativas.*

Corolario 4.20. *Para $n \geq 2$, los grupos isomorfos $[\Sigma^n X, Y]_* \cong [X, \Omega^n Y]_*$ son abelianos.*

4.6. Grupos de Homotopía

En tpología Algebraica utilizamos los *grupos de homotopía* para clasificar los espacios topologicos. El primer grupo ya lo conocemos, es el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$, que nos registra información sobre la familia de curvas cerradas de un espacio. En otras palabras, los grupos de homotopía nos dicen cuantos agujeros o que forma tiene el espacio de nuestro interes.

Definición 4.21. Sea (X, x_0) un espacio topológico punteado. Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos el grupo de homotopía de X de orden n como el conjunto

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, X]$$

.

Ejemplo 4.22. a) Para el caso $n = 0$ tenemos $\pi_0(X, x_0) = [S^0, X]$ coincide con el conjunto punteado de componentes conexas por arcos de X.

b) Para $n = 1$, $\pi_1(X, x_0) = [S^1, X] = [\Sigma S^0, X] = [S^0, \Omega X] = \pi_0(\Omega X)$ sabemos que $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo y también se puede ver eso porque $S^1 = \Sigma S_0$ es un H-cogrupo y no es otra cosa que el grupo fundamental de Poincaré de X.

Si $n \geq 2$ tenemos que

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, X] = [\Sigma S^{n-1}, X] = [S^{n-1}, \Omega X]$$

.

Como ΩX es un H-grupo y S^{n-1} es un H-cogrupo entonces $\pi_n(X, x_0)$ resulta que es un grupo abeliano.

Observación 4. Veamos que

$$\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega X) = \pi_{n-2}(\Omega^2 X) = \ldots = \pi_0(\Omega^n X)$$

.

Definición 4.23. Una *pareja de espacios* es una pareja (X, A), donde X es un espacio topologico y $A \subset X$.

Dadas dos parejas de espacios (X, A) y (Y, B) definimos el espacio de funciones continuas entre ellos como $M(X, A; Y, B) \subset M(X, Y)$, que consiste de todas las aplicaciones continuas $f\colon X \to Y$ tal que $f(A) = B$.

Sean $I = [0, 1]$ y $\partial I = \{0, 1\}$. Consideramos los espacios

$$M(I, \partial I; X, x_0) \subset M(I, 0; X, x_0) \subset M(X, Y)$$

i) a $M(I, X)$ se le llama *espacio de trayectorias libres.*

ii) a $M(I, 0; X, x_0)$ se le llama *espacio de trayectorias en* X basadas en x_0.

iii) a $M(I, \partial I; X, x_0)$ se le conoce como *espacio de lazos en* X basados en x_0 y se denota por $\Omega(X, x_0)$.

Ahora tomemos dos parejas de espacios espacios (X, A) y (Y, B) y definimos su producto como sigue:

$$(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

.

Tenemos entonces la siguiente proposición.

Proposición 4.24.

$$M((X, A) \times (Y, B); (Z, C)) \cong M(X, A; M(Y, B; Z, C), \bar{C})$$

donde $\bar{C} = M(Y, Y; Z, C)$.

Dada esta proposición tenemos que:

$M(I^{n+1}, \partial I^{n+1}; X, x_0) \cong M(I, \partial I; M(I^n, \partial I^n; X, x_0), \bar{x_0})$

donde $\bar{x_0} \in M(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ tal que$\bar{I} = x_0$.

Al espacio $M(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ se le llama n*espacio de lazos en* X *basados en* x_0 y lo denotamos por $\Omega^n(X, x_0)$.

Con esto tenemos que $\Omega(\Omega(X, x_0), \bar{x_0}) \cong \Omega^{n+1}(X, x_0)$.

Sea tomamos el siguiente funtor $f\colon X \to Y$ en Top_*, podemos hacer

$$f\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$$

con la regla de correspondencia $f_*[\psi] = [f \circ \psi]$ donde $\psi\colon S^n \to X$ continua y punteada. Entonces f_* resulta ser un morfismo de grupos si $n \geq 1$.

Afirmación 4.25. * $\pi_0(X, x_0)$ *es un conjunto y además se tiene el funtor* $\pi_0\colon Top_* \to Set_*$.

* $\pi_1(X, x_0)$ *es un grupo y tenemos el funtor* $\pi_1\colon Top_* \to Grp_*$.

* $\pi_n(X, x_0)$ *es un grupo abeliano cuando* $n \geq 2$ *con el funtor*

$$\pi_n\colon Top_* \to Ab$$

, donde Ab es la categoria de grupos abelianos y morfismos entre grupos.

Proposición 4.26. *Sean* x_0 *y* x_1 *puntos en la misma componente arcoconexa de* X*, entonces* $\pi_n(X, x_0)$ *es isomorfo a* $\pi_n(X, x_1)$ *cuando* $n \geq 1$.

5. Conclusión

Este trabajo nos mostro cuan importante es la unión de de las distintas áreas de la matemática para comprender los distintos obejtos matemáticos que podamos encontrar. El caso de la *topología algebraica* es un gran ejemplo.

Al estudiar los *grupos de homotopía* podemos entender las distintas herramientas que tenemos para comprender a los espacios topológicos. De la misma manera pudimos ver que las categorias nos llevan a comprender la estructura de objetos que parecieran distantes.

Al estudiar estos temas comprendimos el uso de los *grupos de homotopía* para el entendimiento de las propiedades de los espacios topologicos, y esperamos cumplir con mostrar los temas aquí enunciados para generar interes sobre el tema y ganas de estudiarlo.

6. Bibliografia

[1] Diana Avella, Octavio Mendoza, Edith Corina Sáenz y María José Souto. (2014). *Grupos I.* México: papirhos, IM-UNAM.

[2] Salicrup, Graciela. (1993). *Introducción a la Topología.* México: Aportaciones Matemáticas, SMM.

[3] Casarrubias Segura, Fidel; Tamariz Mascarúa, Ángel. (2012). *Elementos de Topología General.* Mëxico: Aportaciones Matemáticas, SMM.

[4] Prieto de Castro, Carlos. (2013). *Topología básica.* México: Colec. Ediciones Cientificas Universitarias, FCE.

[5] Allen Hatcher. (2001). *Algebraic Topology.* UK: Cambridge University Press.

[6] Cisneros Molina, José Luis. (2001). *Grupo Fundamental y Espacios Cubrientes.* (Notas). Escuela de Verano en Topología y Geometría. Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca.

[7] Fragalá, Marina. (2003). *Teoría de homotopía y aplicaciones.* (Tesis de Licenciatura). Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires, Argentina.

[8] Cisneros Molina, José Luis. (2014).*¿Qué dice la Conjetura de Poincaire?* (Notas). Escuela de Verano en Topología y Geometría. Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca.

[9] Cisneros Molina, José Luis. (2009). *Grupos de Homotopía.* Notas. XIX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.