Introducción a los espacios de Hardy

Daniela Isis Flores Silva

11 de agosto de 2017

Agradezco al Programa para un Avance Global e Integrado de la Matemática Mexicana, proyecto FORDECyT clave 265667

Los espacios de Hardy fueron introducidos por el matemático Austro-Húngaro Frigyes Riesz (Riesz 1923), quien le dió este nombre en honor al matemático inglés Godfrey Harold Hardy, debido a sus aportaciones en el campo (Hardy 1915).
Comenzaremos por dar algunos conceptos y resultados que nos servirán en el desarrollo de los espacios de Hardy.

1. Sobre topologías débiles

Si en un espacio normado de dimensión finita consideramos la topología inducida por su norma no siempre podemos obtener compacidad, por esta razón, se introducen las topologías débiles, para ello damos primero la siguiente definición.

Definición 1.
Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ tal que $dim(X) = \infty$. Se define el dual de X como:

$$X^* = \{x^* : X \to \mathbb{C} | x^* \textit{ es lineal y existe } c > 0 \textit{ tal que } |x^*(x)| \leq c\|x\|,\ \forall x \in X\}.$$

Dado $x^* \in X^*$ definimos

$$\|x^*\|_* = sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|}$$

lo cual es una norma para X^*.
Recordemos las siguientes definiciones

Definición 2.
Dado un espacio normado X, se dice que X es un espacio de Banach si es completo con la métrica inducida por su norma.
Dado un espacio con producto interior H, se dice que H es un espacio de Hilbert si es completo con la métrica inducida por su producto interior.

Proposición 1.
$(X^*, \|.\|_*)$ *es un espacio de Banach.*

Ahora definimos la topología débil en un espacio normado.

Definición 3.
Sea X un espacio normado. La topología débil de X es la X^*-topología en X, denotada ω y definida por:

$$\omega = \tau(\{(x^*)^{-1}(A) \mid A \subset \mathbb{C} \textit{ es abierto y } x^* \in X^*\}).$$

La topología débil es la topología más fina en X que hace continuas a las funciones de X^*.

Una vecindad del cero en esta topología es de la siguiente forma:

$$V(0, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*, \varepsilon) = \{x \in X \mid |x_j^*(x)| \leq \varepsilon, j = 1, 2, \ldots, m\},$$

para cuales quiera $m \in \mathbb{N}$ y $x_j^* \in X^*$ con $j = 1, 2, \ldots, m$

La convergencia en esta topología es la convergencia débil, la cual definimos a continuación.

Definición 4.
Sea H un espacio de Hilbert, una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H, se dice que converge débilmente a $u \in H$ si para cada $x \in H$, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} < u_n, x >=< u, x >.$$

A continuación enunciamos algunos resultados importantes para la convergencia débil.

Proposición 2.
Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en H, tal que la sucesión $(< u_n, x >)$ converge en $\mathbb{R}$, para cada $x \in H$. Entonces existe $u \in H$ tal que $u_n \to u$ débilmente en H.

Proposición 3.
Sea X un espacio vectorial normado, se cumple para $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que , $x_n \to 0$ débilmente si y solo si $x^*(x_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, $\forall x^* \in X^*$.

Demostración.
$\Longleftarrow]$
Sea $x^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$. Luego, existe $N = N(x^*, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V(x^*, \varepsilon)$, para toda $n \geq N$, esto es $|x^*(x_n)| \leq \varepsilon$
$[\Longrightarrow$
Sean $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, por hipótesis tenemos que existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que $|x_j^*(x_n)| < \varepsilon$, para toda $n \geq N_j$ con $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Sea $N = \max_{1\leq j\leq m} N_j$, luego $x_n \in V(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*, \varepsilon)$ □

Teorema 1.
Si X es un espacio normado separable, entonces toda sucesión acotada en X^* contiene una sucesión débilmente convergente.

El siguiente resultado muestra una de las desventajas al considerar la topología débil.

Proposición 4.
Sea X un espacio normado, se ccumple que si , entonces (X, τ_w) no es metrizable.

Más aún, se cumple que el espacio sera metrizable siy solo si $dimX < \infty$, sin embargo más adelante veremos cuales son las razones por las que resulta muy útil trabajar la topología débil y la topología débil$*$, la cual introducimos a continuación.

Definición 5.
Sea X un espacio normado, definimos $i : X \to X^{**}$, donde $X^{**} = (X^*)^*$ tal que $i(x) = i_x$, donde $i_x : X^* \to \mathbb{C}$ es tal que $i_x(x^*) := x^*(x)$. La topología débil$*$, denotada w^* de X^* es la topología inducida por la función i en X^*

Con estas definiciones, notemos que dado un espacio normado X, podemos dotar a su espacio dual X^* con tres topologías , la topología inducida por su norma, la topología débil considerando a su doble dual X^{**} y la topología débil$*$, las cuales coinciden únicamente cuando $dim X < \infty$.
Una de las ventajas de la topología w^* es que al tener menos conjuntos cerrados podemos alcanzar la compacidad.

Teorema 2. *(Banach-Alaoglu)*
La bola unitaria cerrada de X^* es $w^* -$ compacta.

Ahora, daremos la noción de la convergencia correspodiente a la topología w^*

Definición 6.
Sea X un espacio normado y X^* el dual de X, se dice que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X^* converge débilmente$*$ a $u \in X^*$, si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$, para todo $x \in X$, es decir $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a u en X.

Proposición 5.
Si $u_n \to u$ débilmente$*$ entonces $\|u\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\|$

En general la convergencia dada por la topología inducida por su norma, también llamada convergencia fuerte, implica la convergencia débil y débil$*$, pero el recíproco en general no se cumple. Las convergencias débil y débil$*$ se relacionan de la siguiente manera.

Teorema 3.
Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $u_n \to u$ débilmente, entonces $u_n \to u$ débilmente$*$.

El recíproco del teorema anterior en general no se cumple, solo bajo ciertas condiciones del espacio, las cuales revisaremos en la siguiente sección.

2. Reflexividad

Definición 7.
Sea X un espacio de Banach. X es reflexivo si $X^{**} \cong X$, esto es, que existe $\varphi : X \to X^{**}$ tal que φ es una isometría, biyectiva y lineal.

El siguiente teorema nos provee de muchos ejemplos de espacios reflexivos.

Teorema 4.
Todo espacio de Hilbert es reflexivo.

Demostración. Sea H un espacio de Hilbert, definimos

$$j : H \to H^* \textit{ tal que } j(z) = f_z$$

donde,

$$f_z(x) :=< x, z >_H .$$

Dada $f \in H^*$, por el teorema de representación de Riesz (Teorema 10) , existe $z_f \in H$ tal que

$$f(x) =< x, z_f >= f_{z_f}(x), \ \forall x \in H,$$

luego $f = f_{z_f} = j(z_f)$, por lo tanto j es sobreyectiva. Además $\|z_f\| = \|f\|_{H^*}$, por lo que j es una isometría y así inyectiva.
Por otra parte, para $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\overline{\alpha} f_z(x) = \overline{\alpha} < x, z >=< x, \alpha z >= f_{\alpha z}(x), \ \forall x \in H,$$

con esto $\overline{\alpha}j(z) = j(\alpha)z$.

Sean $f, g \in H^*$, definimos $< f, g >_* := < z_g, z_f >$, es fácil ver que lo anterior es un producto interrior en H^*.

Veamos ahora que la función i de la definición 5 es sobreyectiva. Sea $G \in H^{**}$, ya que $(H^{**}, \|.\|_*)$ es un espacio de Hilbert, por el teorema de representación de Riesz (Teorema 10), existe una única $f \in H^*$ tal que

$$G(h) =< h, f >_* =< z_f, z_h >= h(z_f) = i_{z_f}(h), \forall h \in H^*,$$

luego $i(z_f) = G$, por lo tanto i es sobreyectiva.
Por otro lado, es fácil ver que $\|i_x\|_{**} = \|x\|$, para todo $x \in H$, de aquí que i es una isometría y esto implica que i es un mapeo inyectivo.
Ahora, dado $\alpha \in \mathbb{C}$, $x, y \in X$ se tiene que $i(\alpha x + y) = i_{\alpha x+y}$, luego, dado $x^* \in X^*$,

$$i_{\alpha x+y}(x^*) = x^*(\alpha x + y) = \alpha x^*(x) + x^*(y) = \alpha i_x(x^*) + i_y(x^*),$$

por lo tanto

$$i_{\alpha x+y} = \alpha i_x + i_y,$$

esto es que i es lineal

□

De manera muy similar se puede probar el siguiente resultado

Teorema 5.
Todo espacio de Lebesgue $L^p(X)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$

La ventaja de tener reflexividad en un espacio es que mediante la topología débil$*$, podemos obtener compacidad utilizando el siguiente resultado.

Teorema 6.
Sea X un espacio de Banach, si X es reflexivo se cumple que, si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $u_n \to u$ débilmente$*$, entonces $u_n \to u$ débilmente .

De aqui es fácil deducir lo siguiente

Proposición 6.
Sea X un espacio de Banach, si X es reflexivo se tiene que la bola unitaria cerrada en X^*, Bw^* es débilmente$*$ compacta.

Lo anterior es una importante herramienta que nos servirá para resultados próximos.

3. Un poco de medida

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, consideramos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{L}^p(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \ tal \ que \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$$

y definimos en el una relación $\mathbf{R}$ tal que

$$f\mathbf{R}g \Leftrightarrow \exists \ N \in \Sigma \ tal \ que \mu(N) = 0 \ y \ \{x \in X \ \| \ f(x) \neq g(x)\} \subset N$$

Se verifica que es de hecho una relación de equivalencia y con ello tenemos la siguiente definición.

Definición 8.
Dado (X, Σ, μ) *un espacio de medida, para* $0 < p < \infty$ *al espacio vectorial*

$$L^p(X) := \mathcal{L}^p(X)/\mathbf{R}$$

lo llamamos espacio de Lebesgue, cuya norma esta dada por:

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposición 7.
$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ *es un espacio de Banach.*

A continuación enunciaremos algunos teoremas importantes que utilizaremos más adelante.

Teorema 7. *(Teorema de la convergencia dominada)*
Sean $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles* $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ *tales que*

a) Existe $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *casi para todo* $x \in X$

b) Existe $g : X \to \mathbb{R}^*$ *positiva, integrable tal que* $|f_n| \leq g$ *casi para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Definición 9.
Dadas $\mu, \sigma \in M(S)$ *se dice que* μ *es absolutamente continua con respecto a* σ *cuando para todo* $A \in \mathcal{B}_s$ *se cumple que,*

$$si\ \sigma(A) = 0\ entonces\ \mu(A) = 0$$

Se denota por $\mu \ll \sigma$

Teorema 8. *(teorema de Radon-Nikodym)*
Dado un espacio medible (X, Σ), *una medida* $\sigma - finita$, $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ *y una medida con signo* $\sigma - finita$, $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ *absolutamente continua con respecto a* μ, *entonces existe una función medible* f *sobre* (X, Σ) *que satisface:*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu,\ para\ todo\ A \in \Sigma.$$

Además, si g *es otra función medible en* (X, Σ) *tal que*

$$\nu(A) = \int_A g d\mu,\ para\ todo\ A \in \Sigma,$$

entonces $f = g$ *excepto, tal vez, en un conjunto de* μ*-medida nula.*

Sea $\mathcal{B}_S$ el conjunto de los borelianos en S, definimos

$$M(S) = \{\mu : \mathcal{B}_S \to \mathbb{C} \mid \mu\ es\ medida\ \}$$

.

Proposición 8.
$M(S)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, donde

$$\|\mu\| := sup\{\sum_{j=1}^{\infty}|\mu(A_j)| \ : \ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = S \ y \ A_j \in \mathcal{B}_S\}$$

Proposición 9.
$M(S)$ con la norma anterior es un espacio de Banach.

Definición 10.
Dadas $\mu, \nu \in M(S)$ se dice que $\mu \perp \nu$ si existen $A, B \in S$ con $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = S$ tales que

$$\mu(A) = \nu(B) = 0$$

Teorema 9. *(De descomposición de Lebesgue)*
Sea $\mu \in M(S)$, existe $f \in L^1(S)$ y $\nu \in M(S)$ con $\nu \perp \mu$ tal que

$$d\mu = f d\sigma + d\nu.$$

Esto es que

$$\mu = \int_A f d\sigma + d\nu.$$

4. Teoremas de Represetación de Riesz

El teorema de Represetación de Riesz da una importante relación entre un espacio y su dual. En esta sección enunciaremos las versiones de dicho teorema para distintos tipos de espacios.

Teorema 10. *(para espacios de Hilbert)*
Sea H un espacio de Hilbert y $\tau : H \to \mathbb{R}$ una función lineal y continua, existe un único $w \in H$ tal que $\tau u =< w, u >$, para todo $u \in H$. Mas aún, la función $i : H \to \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ dada por $iw := \tau w$ es un isomorfismo lineal y una isometría.

De aqui en adelante dado $1 < p < \infty$ denotaremos por p' al exponente conjugado de p, esto es que p' sea tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$

Teorema 11. *(para espacios L^p)*
Sea $1 \leq p < \infty$.Dado $\tau \in (L^p(X))^*$, existe una única $f \in L^{p'}(X)$ tal que $\tau = \tau_f$ donde

$$\tau_f(g) = \int f\overline{g}.$$

Más aún, $\|\tau\|_{(L^p)^*} = \|f\|_p'$
Cuando $p = \infty$ se tiene que $(L^1(X))^* = L^\infty$.

Teorema 12. *(para funciones de variación acotada)*

Sea $f \in C([a, b])^*$. Entonces existe una función $g \in BV([a, b])$ tal que para todo $x \in C([a, b])$

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t)$$

y tal que $\|f\| = V_g$

Teorema 13. *(para medidas complejas)*
$M(S)$ es isométricamente isomorfo a C(S), mediante el isomorfismo τ dado por:

$$\tau(\mu) = \Lambda_\mu,$$

donde

$$\Lambda_\mu(f) = \int_S f d\mu.$$

5. El núcleo de Poisson

Sea f una función holomorfa en $\overline{\mathbb{D}}$ donde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Usando la formula integral de Cauchy tenemos que

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{w} dw,$$

parametrizando obtenemos que

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta \tag{1}$$

Esta expresión nos dice que podemos obtener el valor de la función en el centro del disco como un "promedio"de los valores de la frontera.
Nos podemos preguntar si es posible hacer algo similar con cualquier punto del interior del disco. La respuesta es afirmativa, veámos.
Dado $a \in int(\mathbb{D})$, consideremos la transformación de Möbius siguiente

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z - 1}.$$

Notemos que dicha transformación cumple

$$\varphi_a(\varphi_a(z)) = z,$$

es decir que es su propia inversa y que

$$\varphi_a(0) = a$$

luego $f(a) = f(a) = f \circ \varphi_a(0)$.
Por otro lado, ya que φ es holomorfa, $f \circ \varphi_a$ también lo es así aplicando lo obtenido en 1, si $a = re^{i\beta}$ se tiene que

$$f(a) = f \circ \varphi_a(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f \circ \varphi_a(e^{i\eta}) d\eta.$$

Además, dado que $\varphi_a(z) \in \overline{\mathbb{D}}$ siempre que $z \in \overline{\mathbb{D}}$, $e^{i\theta} = \varphi_a(e^{i\eta})$ y como $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$ se tiene que $e^{i\eta} = \varphi_a(e^{i\theta})$.
Luego $ie^{i\eta}\dfrac{d\eta}{d\theta} = \varphi_a'(e^{i\theta})ie^{i\theta}$ por lo que $e^{i\eta}\dfrac{d\eta}{d\theta} = \varphi_a'(e^{i\theta})e^{i\theta}$;

Así

$$d\eta = \frac{\varphi_a'(e^{i\theta})e^{i\theta}}{e^{i\eta}} d\theta = \frac{\varphi_a'(e^{i\theta})e^{i\theta}}{\varphi(e^{i\theta})} d\theta;$$

Además

$$\varphi_a'(z) = \frac{a\overline{a} - 1}{(\overline{a}z - 1)^2} = \frac{\|a\|^2 - 1}{(\overline{a}z - 1)^2},$$

por lo que

$$d\eta = \frac{\dfrac{\|a\|^2 - 1}{(\overline{a}e^{i\theta} - 1)^2}e^{i\theta}}{\dfrac{e^{i\theta} - a}{\overline{a}e^{i\theta} - 1}} d\theta = \frac{(1 - \|a\|^2)e^{i\theta}}{(\overline{a}e^{i\theta} - 1)(a - e^{i\theta})} = \frac{((1 - \|a\|^2)e^{i\theta})e^{-i\theta}}{(\overline{a}e^{i\theta} - 1)(a - e^{i\theta})e^{-i\theta}}$$

$$= \frac{1 - \|a\|^2}{(\overline{a}e^{i\theta} - 1)(ae^{-i\theta} - 1)} = \frac{1 - \|a\|^2}{\|\overline{a}e^{i\theta} - 1\|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2\rho\cos(\theta - \beta) + r^2}$$

Luego

$$f(a) = f(\varphi_a(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})(1 - r^2)}{1 - 2\rho\cos(\theta - \beta) + r^2} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})P_r(\theta - \beta)d\theta$$

a $P_r(\theta - \beta) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2\rho\cos(\theta - \beta) + r^2}$ se le llama núcleo de Poisson.

Lo que hemos hecho es escribir a la función como un promedio ponderado de los valores de la función en la frontera donde el peso es precisamente el núcleo de Poisson, por lo que tenemos el siguiente resultado.

Teorema 14.
Sea f una función holomorfa en $\overline{\mathbb{D}}$, se cumple que

$$f(re^{i\beta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})P_r(\theta - \beta)d\theta, \ \forall\ 0 < r < 1$$

Veámos que el resultado anterior es también válido para funciones armónicas en el disco, para esto recordemos primero el siguiente resultado.

Teorema 15. *(Teorema de Green)*
Sea C una curva cerrada simple orientada positivamente y sea D la región delimitada por C. Si u y v tienen derivas parciales continuas en una región abierta que contenga a D se cumple que

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)dA = \int_C u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}$$

donde n es el vector normar exterior a D.

Sea u una función armónica en $\mathbb{D}$ y sea $v(x,y) = ln(x^2+y^2)$. Ya que esta función no está definida en el cero, para utilizar el resultado anterior, definimos una nueva región, dado $0 < \varepsilon < 1$ hacemos

$$\Omega = \mathbb{D}\backslash\varepsilon\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{D}\ :\ \varepsilon < |x|\},$$

por el teorema anterior tenemos que

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dA = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}$$

Es fácil verificar que la función v cumple que $\Delta v = 0$ y dado de u es armónica se sigue que.

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

Luego dado que $\partial\Omega = S^1 \cup \varepsilon S^1$, se tiene que

$$\int_{S^1} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\varepsilon S^1} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}$$

Ahora como $\frac{\partial v}{\partial n} =< \nabla v, n >=< 2(x,y),(x,y) >= 2$ y $v = 0$, $\forall (x,y) \in S^1$

$$\int_{S^1} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} = 2\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})d\theta$$

Además en εS^1 se tiene que $\frac{\partial v}{\partial n} =< \nabla v, n >=< \frac{2(x,y)}{\varepsilon^2}, \frac{(x,y)}{\varepsilon} >= \frac{2}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon S^1} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{2}{\varepsilon}\int_0^{2\pi} \varepsilon\ u(\varepsilon e^{i\theta})d\theta - \int_0^{2\pi} \varepsilon ln(\varepsilon)\frac{\partial u(\varepsilon e^{i\theta})}{\partial n}d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} u(\varepsilon e^{i\theta})d\theta - \varepsilon ln(\varepsilon)\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(\varepsilon e^{i\theta})}{\partial n}d\theta,\end{aligned}$$

luego

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varepsilon e^{i\theta})d\theta - \frac{\varepsilon ln(\varepsilon)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(\varepsilon e^{i\theta})}{\partial n}d\theta$$

Así, al hacer tender épsilon a cero obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})d\theta &= \lim_{\epsilon\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})d\theta \\ &= \lim_{\epsilon\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varepsilon e^{i\theta})d\theta - \lim_{\epsilon\to\infty} \frac{\varepsilon ln(\varepsilon)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(\varepsilon e^{i\theta})}{\partial n}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(0)d\theta - 0 \\ &= u(0)\end{aligned}$$

lo cual es análogo al resultado obtenido por la forma integral de Cauchy para funciones holomorfas, por lo que usando el mismo procedimiento que usamos anteriormente podemos obtener el siguiente resultado, el cual da la solución al problema de Dirichlet en el disco..

Teorema 16.
Sea f una función armónica en $\overline{\mathbb{D}}$, se cumple que

$$f(re^{i\beta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})P_r(\theta-\beta)d\theta,\ \forall\ 0 < r < 1$$

En los resultados anteriores, podemos observar que el protagonista es el núcleo de Poisson. Veámos algunas otras de sus propiedades:

1. $\Delta P_r(\theta) = 0$.

2. $0 \leq P_r(\theta)$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$.

3. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\varphi - \theta)d\theta = 1$, $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$.

4. Para cada $\delta > 0$, se tiene que

$$\int_{|t|>\delta} P_r(t)dt \to 0 \textit{ cuando } r \to 0.$$

6. Espacios de Hardy armónicos

Comenzamos por definir los espacios de Hardy armónicos en el disco, denotados $h^p(\mathbb{D}) = h^p$ con $1 \leq p < \infty$

Definición 11. *Sean $0 < p < \infty$ y $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una función armónica.*
Se dice que $u \in h^p$ si

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p < \infty,$$

Si $p = \infty$ decimos que $u \in h^\infty$si $u(z)$ es acotada en $\mathbb{D}$.

Se define la norma en h^p como:

$$\|u\|_{h^p} := \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p \theta \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \|u_r\|_p$$

Ahora veámos cómo caracterizar las funcones en h^p, comencemos haciéndolo para $p = 1$, para ello damos la siguiente definición.

Definición 12.
Sea $\mu(t) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada, a $u : \mathbb{D}(0, r) \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)$$

se le llama Integral de Poisson-Stieltjes.

También requerimos del siguiente resultado.

Lema 1. *(Teorema de selección de Helly)*
Sea $\{\mu_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una suceción uniformemente acotada, esto es que $\mu_n \in BV([a, b])$ y $\|\mu_n\| \leq c$, $\forall n \geq 1$, entonces existe una subsuceción $\{\mu_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\mu \in BV([a, b])$ tal que

$$\mu_{n_k}(t) \to \mu(\textit{casi dondequiera en } [a, b])$$

y

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(t)\mu_{n_k}(t)dt = \int_a^b \varphi(t)\mu(t)dt, \ \forall \varphi \in C([a, b])$$

Ahora si, pasemos a probar el siguiente teorema que muestra como podemos caracterizar a las funciones en h^1

Teorema 17.
Las siguientes tres clases de funciones son equivalentes:
i) Integrales de Poisson Stieltjes
ii) Diferencias de dos funciones armónicas positivas
iii) h_1

Demostración. i)$\Longrightarrow$ ii)

Sea $\mu \in BV([0,2\pi])$ y $u(z) = u(re^{i\theta}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)$, luego existen

$$\mu_1 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}, \mu_2 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$$

funciones monótonas crecientes tales que

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 \ en \ [0,2\pi],$$

luego $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$, donde

$$u_j(z) = u_j(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)d\mu_j(t), \ j = 1,2$$

además como $P_r(\theta - t) \geq 0$, se tiene que $u_j(z) \geq 0$. Hemos escrito a $u(z)$ como diferencia de dos funciones positivas, ahora veamos que son armónicas, para esto veamos primero que

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} Pr(\theta - t)d\mu_j(t) \right| \leq \infty$$

Tenemos que

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta)\cos(t) - 2rsen(\theta)sen(t)},$$

recordando que

$$r^2 = x^2 + y^2, \ x = rcos(t) \ y \ x = rsen(t)$$

obtenemos que

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2 - 2\cos(\theta)x - 2sen(\theta)y},$$

luego

$$ln(P_r(\theta - t)) = ln(1 - x^2 - y^2) - ln(1 + x^2 + y^2 - 2\cos(\theta)x - 2sen(\theta)y);$$

Así

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}P_r(\theta - t)}{P_r(\theta - t)} = \frac{-2x}{1 - x^2 - y^2} - \frac{2(x - \cos(\theta)}{1 + x^2 + y^2 - 2\cos(\theta)x - 2sen(\theta)y};$$

Finalmente

$$\frac{\partial}{\partial x}P_r(\theta - t) = h(x,y)P_r(\theta - t),$$

donde

$$h(x,y) = \frac{-2x}{1 - x^2 - y^2} - \frac{2(x - \cos(\theta)}{1 + x^2 + y^2 - 2\cos(\theta)x - 2sen(\theta)y},$$

así

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_r(\theta - t) &= h(x,y)\frac{\partial}{\partial x}P_r(\theta - t) + \frac{\partial}{\partial x}h(x,y)P_r(\theta - t) \\
&= h(x,y)^2 P_r(\theta - t) + \frac{\partial}{\partial x}h(x,y)P_r(\theta - t),
\end{aligned}$$

luego

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2}P_r(\theta - t) \right| \leq |h(x,y)|^2 |P_r(\theta - t)| + \frac{\partial}{\partial x}h(x,y)|P_r(\theta - t)|.$$

Dado que $h(x,y), P_r(\theta - t), \dfrac{\partial}{\partial x}h(x,y)$ son funciones continuas en $[0,2\pi]$ se tiene que

$$\int_0^{2\pi} |\frac{\partial^2}{\partial x^2}Pr(\theta - t)d\mu_j(t)| \leq \infty$$

De manera similar se obtiene que

$$\int_0^{2\pi} |\frac{\partial^2}{\partial y^2}Pr(\theta - t)d\mu_j(t)| \leq \infty.$$

Utilizando el Teorema de la convergencia dominada (Teorema 7) se tiene que

$$\Delta u_j(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta P_r(\theta - t)d\mu_j(t)$$

y recordando que $\Delta P_r(\theta - t) = 0$ se tiene que $\Delta u_j(z) = 0$, esto es $u_j(z)$ es armónica.

ii) $\Longrightarrow$ iii)
Tenemos que

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z),\ \forall z \in \mathbb{D}\ con\ u_j(z) \geq 0$$

y $\Delta u_j(z) = 0$ en $\mathbb{D}$, luego $\forall r \in [0,1)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|d\theta &= \int_0^{2\pi} |u_1(re^{i\theta}) - u_2(re^{i\theta})|d\theta \\
&\leq \int_0^{2\pi} |u_1(re^{i\theta})| + |u_2(re^{i\theta})|d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} |u_1(re^{i\theta})|d\theta + \int_0^{2\pi} |u_2(re^{i\theta})|d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} u_1(re^{i\theta})d\theta + \int_0^{2\pi} u_2(re^{i\theta})d\theta \\
&= 2\pi(u_1(0) - u_2(0))
\end{aligned}$$

por lo tanto $u \in h_1$.

iii) $\Longrightarrow$ i)
Sea $u \in h^1$, definimos

$$\mu_r(t) = \int_0^t u(re^{i\theta})d\theta.$$

Claramente $\mu_r(0) = 0$.Sea $P = \{t_k\}_k = 1^n \in P([a,b])$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} |\mu_r(t_{j+1}) - \mu_r(t_j)| &= \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_0^{t_{j+1}} u(re^{i\theta})d\theta - \int_0^{t_j} u(re^{i\theta})d\theta \right| \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} u(re^{i\theta})d\theta \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |u(re^{i\theta})|d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| \\
&\leq \|u\|_{h^1}
\end{aligned}$$

y ya que P fue arbitraria se tiene que

$$\|\mu_r\|_{BV} \leq \|u\|_{h_1}, \ \forall r \in [0,1].$$

Por el teorema de Selección de Helly, existen $r_{n n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1]$ tal que $r_n \to 1^-$ y $\mu \in BV([0,2\pi])$ tal que $\mu_{r_n} \to \mu$ (casi donde quiera en $[0,2\pi]$) y

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\mu_{r_n}(t)dt \to \int_0^{2\pi} \varphi(t)\mu_r(t)dt, \ \forall \varphi \in C([0,2\pi]).$$

En particular como $P_r(\theta - .) \in C([0,2\pi])$ para r y θ fijos. Si $z = re^{i\theta}$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)d\mu_r(t) = \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \Delta P_r(\theta - t)d\mu_{r_n}(t) = \lim_{n\to\infty} u(r_n z) = u(z).$$

□

Nos podemos preguntar ahora, que pasa con las funciones de h^1 en la frontera de $\mathbb{D}$, ¿Siempre existirá el límite en la frontera? para dar respuesta a esta pregunta, damos primero la siguiente definición.

Definición 13.
Sea μ una función a

$$D_\mu(\theta) := \lim_{t\to 0}\frac{\mu(\theta + t) - \mu(\theta - t)}{2t}$$

cuando existe se le llama Derivada Simétrica .

El siguiente teorema, describe el comportamiento de las funciones de h^1 en la frontera de $\mathbb{D}$

Teorema 18.
Sea $u \in h^1(\mathbb{D})$, por lo que existe $\mu(t) \in BV([0,2\pi])$ tal que $u(z) = u(re^{i\theta}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(r,t)d\mu(t)$, luego se cumple que, si existe $D_\mu(\theta)$ entonces existe $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta})$ y es igual a $D_\mu(\theta)$

Demostración.
Recordemos que una función armónica compuesta con una rotación, continúa siendo armónica, por lo que sin perder generalidad podemos suponer que $\theta = 0$.
Sea $A = D_\mu(0)$, recordando que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(r,t)dt = 1$ se tiene que

$$u(r) - A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,t)d\mu(t) - A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,t)[d\mu(t) - Adt]$$

.
Usando integración por partes se obtiene que

$$\int_0^{2\pi} P_r(t)[d\mu(t) - Adt] = P_r(t)[\mu(t) - at] \mid_{t=-\pi}^{t=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial t}P_r(t)[\mu(t) - At]dt.$$

Por una parte

$$P_r(t)[\mu(t) - at] \mid_{t=-\pi}^{t=\pi} = P_r(\pi)[\mu(\pi) - \mu(-\pi) - 2a\pi] = \left(\frac{1 - r^2}{1 + r^2 + 2}\right)(\mu(\pi) - \mu(-\pi) - 2a\pi),$$

por lo tanto

$$\lim_{r\to 1^-} P_r(\pi)(\mu(\pi) - \mu(-\pi) - 2a\pi) \mid_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$, como $A = \lim_{t\to 0}\dfrac{\mu(\theta - t) - \mu(\theta - t)}{2t}$, existe $\delta > 0$ tal que, si $0 < |t| < \delta$ entonces se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)[\mu(t) - At]dt = I_\delta + \int_{\delta<|t|<\pi} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)[\mu(t) - At]dt,$$

donde

$$\begin{aligned} I_\delta &= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)[\mu(t) - At]dt \\ &= \int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)[\mu(t) - At]dt + \int_{-\delta}^{0} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)[\mu(t) - At]dt \\ &= \int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)[\mu(t) - At]dt + \int_{-\delta}^{0} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)[\mu(t) - At]dt \\ &= \int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)[\mu(t) - At]dt - \int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)[\mu(-t) + At]dt \\ &= \int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)[\mu(t) - \mu(-t) - 2At]dt \end{aligned}$$

pues considerando el cambio de variable $\tau = -t$ y renombrando variables que obtiene que

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)[\mu(t) - At]dt = -\int_{\delta}^{0} - \frac{\partial}{\partial \tau} P_r(\tau)[\mu(-\tau) + A\tau]d\tau = -\int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)[\mu(-t) + At]dt,$$

luego

$$T_\delta = 2\int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)t[\frac{\mu(t) - \mu(-t)}{2t} - A]dt < 2\varepsilon \int_{0}^{\delta} \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)tdt$$

por lo tanto $|I_\delta| < 2c\varepsilon$, donde

$$c = \int_{0}^{\delta} \left| \frac{\partial}{\partial t} P_r(t)t \right| dt.$$

Para $\delta < |t| < \pi$ se tiene que $\cos(t) < \cos(\delta)$, luego

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} P_r(t) \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2rcos(t)} \right) \right| \\ &= \left| \frac{-(1 - r^2)2rsen(t)}{(1 + r^2 - 2rcos(t))^2} \right| \\ &= \frac{(1 - r^2)2rsen(t)}{(1 + r^2 - 2rcos(t))^2} \\ &\leq \frac{(1 - r^2)2r}{(1 + r^2 - 2rcos(\delta))^2} \end{aligned}$$

además como $\mu \in BV([0, 2\pi])$ existen μ_1, μ_2 funciones monótonas crecientes tales que $\mu = \mu_1 + \mu_2$ por lo que.

$$\int_{\delta<|t|<\pi} [\mu(t) - At]dt = \int_{\delta<|t|<\pi} \mu(t)dt - \int_{\delta<|t|<\pi} Atdt \leq [\mu_1(-\delta) + \mu_1(\pi) - \mu_2(\delta) - \mu_2(-\pi)](\pi - \delta) - \int_{\delta<|t|<\pi} Atdt.$$

Por lo tanto

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\delta<|t|<\pi} [\mu(t) - At]dt \leq \frac{(1 - r^2)2r}{(1 + r^2 - 2rcos(\delta))^2} \left([\mu_1(-\delta) + \mu_1(\pi) - \mu_2(\delta) - \mu_2(-\pi)](\pi - \delta) - \int_{\delta<|t|<\pi} Atd\right.$$

con todo

$$\begin{aligned}|u(r)-A| &\leq \frac{1}{2\pi}\left|P_r(t)[\mu(t)-at]\ |_{t=-\pi}^{t=\pi}\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial t}P_r(t)[\mu(t)-At]dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\left|P_r(t)[\mu(t)-at]\ |_{t=-\pi}^{t=\pi}\right| + \frac{1}{2\pi}|I_\delta| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\delta<|t|<\pi}\frac{\partial}{\partial t}P_r(t)[\mu(t)-At]dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\left|P_r(t)[\mu(t)-at]\ |_{t=-\pi}^{t=\pi}\right| + \frac{c}{\pi}|I_\delta| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\delta<|t|<\pi}\frac{\partial}{\partial t}P_r(t)[\mu(t)-At]dt\right|\end{aligned}$$

luego

$$\limsup_{r\to 1^-}|u(r)-A| \leq \limsup_{r\to 1^-}\left(\frac{1}{2\pi}\left|P_r(t)[\mu(t)-at]\ |_{t=-\pi}^{t=\pi}\right| + \frac{c}{\pi}|I_\delta| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\delta<|t|<\pi}\frac{\partial}{\partial t}P_r(t)[\mu(t)-At]dt\right|\right)$$

$$\leq \limsup_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\left|P_r(t)[\mu(t)-at]\ |_{t=-\pi}^{t=\pi}\right| + \frac{c}{\pi}\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\limsup_{r\to 1^-}\left|\int_{\delta<|t|<\pi}\frac{\partial}{\partial t}P_r(t)[\mu(t)-At]dt\right| = \frac{c}{\pi}\varepsilon$$

por lo tanto $\lim_{r\to 1^-}|u(r)-A| = 0$, pero $\lim_{r\to 1^-}|u(r)-A| = |\lim_{r\to 1^-}(u(r)-A)| = |\lim_{r\to 1^-}u(r)-A|$ por lo que

$$\lim_{r\to 1^-}u(r) = A$$

□

Enunciemos ahora unas desigualdades que nos seran útiles más adelante

Lema 2. *(Desigualdad de Jensen)*
Sea μ una medida de probabilidad sobre un conjunto X, $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ una función convexa,se cumple que

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi\circ f d\mu.$$

Lema 3. *(Desigualdad de Minkowsky*
Sea $f(x,y)$ medible

$$\left(\int_Y\left|\int_X f(x,y)d\mu(x)\right|^p d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_X\left(\int_Y |f(x,y)|^p d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x)$$

Para $1<p<\infty$, el resultado análogo al Teorema 17 en la equivalencia ya no incluye las diferencias de funciones armónicas positivas, se da de la siguiente manera.

Teorema 19.
Para $1<p<\infty$, si $u\in h^p$ entoncesexiste $\mu\in L^p(S^1)$ tal que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t)$$

Demostración. $\Longrightarrow$]
Sean $u\in h^p$ y $r\in[0,2\pi)$, definimos $\mu_r(t) = \displaystyle\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})$, claramente $\mu_r(0)=0$.

Veamos que $\mu_r(t) \in L^p(S^1)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\mu_r(t)|^p dt &= \int_0^{2\pi} \left| \int_0^t u(re^{\theta})d\theta \right|^p dt \\
&\leq \int_0^{2\pi} \int_0^t |u(re^{i\theta})|^p d\theta dt \\
&\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta dt \\
&\leq \int_0^{2\pi} \|u\|_p dt \\
&= 2\pi \|u\|_p
\end{aligned}$$

Así, como $L^p(S^1)$ es reflexivo se tiene por la Proposición 6 que $B_w([0,2\pi])$ es $w*$-secuencialmente-compacta y por tanto, existe $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. tal que $r_n \to 1^-$ y $\mu \in L^p(S^1)$ tal que $\mu_{r_n} \to \mu$ casi dondequiera en $[0,2\pi]$, esto es

$$\int_0^{2\pi} g d\mu_{r_n}(t) \to \int_0^{2\pi} g d\mu(t), \forall\ g \in L^{p'}(S^1)$$

Ahora veamos que $P_r(\theta - \cdot) \in L^{p'}(S^1)$.
En efecto,

$$\int_0^{2\pi} |P_r(\theta - t)|^{p'} dt = \int_0^{2\pi} \left| \frac{1-r^2}{1+r^2-2cos(\theta-t)} \right|^{p'} dt \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{1-r^2}{1+r^2-2} \right|^{p'} dt < \infty$$

por lo tanto, si $z = e^{i\theta}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)d\mu_r(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\mu_{r_n}(t)$$

Como

$$\mu_{r_n}(t) = \int_0^t u(re^{i\theta})d\theta,$$

por el teorema fundamental del cálculo se tiene que $d\mu_{rn} = u(r_n e^{i\theta})$,
luego,

$$\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)d\mu_r(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)u(r_n e^{it})dt = \lim_{n\to\infty} u(r_n z) = u(z)$$

□

Para mostrar un resultado análogo al teorema 19 para $1 < p < \infty$ nos auxiliamos del resultado siguiente

Proposición 10.
Para $1 < p < \infty$ se tiene que $h^p \subset h^1$

Demostración. Sea $u \in h^p$ basta probar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|d\theta < \infty$.

Dado que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = 1$ y $\varphi(x) = x^p$ es una función convexa, se tiene por la desigualdad de Jensen que

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = \left(\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{p}{p}} \leq \left(\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2\pi}^{\frac{1}{p}} \|u\|_{h^p} \leq \infty$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta \leq \infty$$

□

Con esto, por el teorema 19 podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 20.
Sea $u \in h^p(\mathbb{D})$, por lo que existe $\mu \in L^p(S^1)$ tal que $u(z) = u(re^{i\theta}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(r,t) d\mu(t)$, luego se cumple que, si existe $D_\mu(\theta)$ entonces existe $\lim\limits_{r \to 1^-} u(re^{i\theta})$ y es igual a $D_\mu(\theta)$

7. Espacios de Hardy

En esta sección darmemos los resultados análogos a los espacios de Hardy armónicos en $\mathbb{D}$ para los espacios de Hardy holomorfos en $\mathbb{D}$, comencemos por la definición.

Definición 14.
Sean $0 < p < \infty$ y $f(z)$ una función holomorfa en $\mathbb{D}$.
Se dice que $f \in H^p$ si

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \theta = \|f\|_{H^P}^p < \infty$$

Si $p = \infty$ decimos que $f \in H^\infty$ si $f(z)$ es acotada en $\mathbb{D}$.

Definición 15.
Se define la norma en H^p como:

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p$$

Tenemos el siguiente teorema, análogo al Teorema 19

Teorema 21.
Para $1 < p < \infty$, $f \in H^p$ si y solo si existe $g \in L^p(S^1)$ tal que

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g(t) dt.$$

Teorema 22.
Si $f \in H^p$ entonces

$$M_p(r,f) := \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt$$

es una función creciente en $0 \leq r < 1$.

Por el resultado anterior tenemos que

$$\|f\|_{H^p} := \lim_{r \to 1} \|f_r\|_p$$

El siguiente teorema es el resultado análogo al Teorema 18 en espacios armónicos, el cual fue probado por Katznelson en 1976.

Teorema 23.
Si $f \in H^p$, entonces el límite radial

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 0} f(r^{ei\theta})$$

existe para casi todo $\theta \in [0, 2\pi]$.

En este caso, no dependemos de la existencia de la derivada simétrica para la existencia de los límites radiales, en estos espacios siempre existe, excepto posiblemente un conjunto de medida cero.Debido a esto, podemos caracterizar a las funciones en H^p de la siguiente forma.

Teorema 24.
$f \in H^p$ si y solo si

$$f(re^{i\beta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\phi - \beta)\tilde{f}(e^{i\phi})d\phi$$

El siguiente teorema nos da una propiedad de los espacios holomorfos que no poseen los espacios armónicos.

Teorema 25.
Si $f \in H^p$, los coeficientes de fourier negativos de f se anulan, esto es que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = 0, \ \forall n < 0$$

Demostración. Podemos expresar al núcleo de Poisson como

$$P_r(\theta) = Re\left(\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z}\right),$$

recordando que $Re(w) = \frac{w+\overline{w}}{2}$ es fácil ver que

$$P_r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\theta n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\theta n}\overline{z}^n$$

. Como f holomorfa en $\mathbb{D}$ luego

$$f(re^{i\beta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})P_r(\theta - \beta)d\theta,$$

así por lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
f(re^{i\beta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(\theta-\beta)n}z^n + \sum_{n=1}^{\infty} e^{i(\theta-\beta)n}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(\theta-\beta)n}z^n d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sum_{n=1}^{\infty} e^{i(\theta-\beta)n}\ \overline{z}^n d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-i(\theta-\beta)n}d\theta z^n + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{i(\theta-\beta)n}d\theta\ \overline{z}^n.
\end{aligned}$$

Recordando que toda función analítica admite un desarrollo en serie de potencias obtenemos que

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{i(\theta-\beta)n}d\theta = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\square$

8. Dimensiones superiores

Veamos cuales de los resultados análogos a los obtenidos para $n = 2$ son válidos para $n \geq 3$. De aquí en adelante

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| = 1\}$$

y

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| < 1\}$$

Definición 16.
Dado $\xi \in S$, el Núcleo de Poisson de $x \in B$ es la función $P_\xi(x)$, dada por

$$P_\xi(x) = \frac{1 - \|x\|^2}{(1 + \|x\|^2 - 2 < x, \xi >)^{\frac{n}{2}}}$$

Definición 17.
La integral de Poisson una función $f \in C(S)$ es la función $P[f]$ dada por

$$P[f](x) = \int_S f(\xi) P_\xi(x) d\sigma(\xi),$$

dónde σ es la medida en S

Definición 18.
Para $\mu \in M(S)$, se define la integral de poisson de μ, denotada por $P[\mu]$ como

$$P[\mu](x) = \int_S P_\xi(x) d\mu(\xi)$$

Dada una función $u \in B$ para $0 < r < 1$ definimos la función

$$u_r(x) := u(rx),$$

que son las dilataciones en la bola.

La integral de Poisson tiene las siguientes propiedades.

Teorema 26. *a) Si $\mu \in M(S)$ y $u = P[\mu]$ entonces $\|u_r\|_1 \leq \|\mu\|$, para todo $r \in [0, 1)$.*

b) Si $1 < p < \infty$, $f \in L^p(S)$ y $u = P[f]$, entonces $\|u_r\|_p \leq \|f\|_p$.

El siguiente corolario, es un resultado análogo al Teorema 22.

Corolario 1.
Si u es armónica en B y $0 \leq r \leq s < 1$ entonces $\|u_r\|_p \leq \|u_s\|_p$

La integral de Poisson de funciones en $L^1(S1)$ cumplen lo siguiente.

Teorema 27.
Si $f \in L^1(S^1)$ entonces $\lim\limits_{r \to 1^-} P[f](rx) = f(x)$, para todo $x \in S^1$

En general las funciones en L^p cumplen lo siguiente.

Teorema 28.
Sea $1 \leq p < \infty$. Si $f \in L^p(S)$ y $u = P[f]$ entonces

$$\|u_r - f\|_p \to 0, \ \textit{cuando } r \to 1$$

Si $\mu \in M(S)$ y $u = P[\mu]$, se tiene que $u_r \in L^1(S)$, para toda $r \in [0,1)$.
¿ Se cumplirá lo análogo al resultado anterior, es decir, que $\|u_r - \mu\|_{M(S)} \to 0$, cuando $r \to 1$?. La respuesta a esta pregunta es negativa, en realidad ocurre bajo ciertas condiciones, veámos.

Teorema 29.
$u_r - \mu \to 0$, cuando $r \to 1$ si $\mu \ll \sigma$, donde σ es la medida de S.

Si no queremos poner ninguna restricción a las medidas Tomando la convergencia débil$*$ se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 30.
a)Si $\mu \in M(S)$ y $u = P[\mu]$ entonces $u_r \to \mu$ débilmente$*$ en $M(S)$ cuando $r \to 1$, esto es

$$\int_S u_r \varphi d\sigma \to \int_S \varphi d\mu,$$

donde σ es la medida en S.
b) Si $f \in L^\infty(S)$ y $u = P[f]$ entonces $u_r \to f$ débilmente$*$ en $L^\infty(S)$ cuando $r \to 1$esto es

$$\int_S g u_r d\sigma \to \int_S g f d\sigma,$$

donde σ es la medida en S.

Más aún, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 31. *a) El mapeo $\mu \to P[\mu]$ es una isometría lineal de $M(S)$ sobre $h^1(B)$), esto es $\|P[\mu]\|_{h^1} = \|\mu\|_{M(S)}$.*

b) Para $1 < p \leq \infty$ $f \to P[f]$ es una isometría lineal de $L^p(S)$ sobre $h^1(B)$), esto es $\|P[f]\|_{h^p} = \|f\|_{L^p}$.

Teorema 32.
Si $\mu \in M(S)$, entonces $\lim_{r\to 1^-} P[\mu](rx) = f(x)$, dónde $f \in L^1(S)$, aparece en la descomposición de Lebesgue (Teorema 9) de μ respecto a σ

9. Espacios de Hardy en el semiplano superior

Sabemos que podemos ver a $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, así, dar un punto en $z \in \mathbb{R}^n$ como $z = (x, y)$, con $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $y \in \mathbb{R}$

Definición 19.
El semi espacio superior $\mathbb{H} = \mathbb{H}^n$ es el conjunto

$$\mathbb{H}^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \ : \ y > 0\}$$

Pasamos a definir los espacios de Hardy en el semiplan o superior.

Definición 20.
Sean $0 < p < \infty$ y $f(z)$ una función holomorfa en $\mathbb{H}$.
Se dice que $f \in H^p(\mathbb{H})$ si

$$\sup_{0<y} \int_{\mathbb{H}} |f_y(x)|^p dx = \|f\|_{H^P}^p < \infty$$

Si $p = \infty$ decimos que $f \in H^\infty(\mathbb{H})$si $f(z)$ es acotada en $\mathbb{H}$.

Una diferencia entre los espacios de Hardy en el disco y los espacios de Hardy en el semiplano superior es que las funciones constantes no se encuentran en $H^p(\mathbb{H})$ pero si en $H^p(\mathbb{D})$

Definición 21.
Sea f una función en $\mathbb{H}$ y $0 < y$, definimos la función

$$f_y := f(x, y)$$

La función que acabamos de definir jugará el mismo papel que las dilataciones en la bola. Y análogamente al resultado del Teorema 23 en el disco, para el semiplano superior tenemos el siguiente teorema.

Teorema 33. *(Teorema de Fatou)*
Sea $0 \leq p < \infty$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, luego $P_H[f]$ tiene un límite no tangencial $f(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^{n-1}$

También, de manera análoga al Teorema 25 en el disco obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 34.
Si $f \in H^1(\mathbb{H})$ entonces la transformada de fourier de $\tilde{f}$ en el eje real negativo se anula.

Notemos que diferencia del disco, para $\mathbb{H}$ solo se cumple para $p = 1$, esto, ya que aquí no se cumple que $H^p(\mathbb{H}) \subset H^1(\mathbb{H})$.
El teorema que probaremos a continuación, será de mucha utilidad para probar el resultado final.

Teorema 35.
Sea $h(z)$ una función no negativa en $L^p(\mathbb{R})$. Entonces existe $f(z) \in H^p(\mathbb{H})$ tal que

$$|f(z)| = h(z) \text{ c.d. en } \mathbb{R}$$

si y solo si

$$\int \frac{log(h(t))}{1+t^2} dt > -\infty$$

Demostración. [$\Longleftarrow$
Note que $log(h(t)) \in L^1\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$

$$-\infty < \int \frac{log(h(t))}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{p} \int \frac{|h|^p}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{p} \|h\|_{L(\mathbb{R})} < \infty$$

Dado que $\mathbb{H}$ es simplemente conexo, existe $v(z)$ la armónica conjugada de $u(z)$ en $\mathbb{H}$, esto es que $(u + iv)(z)$ es holomorfa en $\mathbb{H}$.
Ponemos $f(z) = e^{u(z)+iv(z)} \in Hol(H)$, luego usando la desigualdad de Jensen dado que e^x es una función convexa obetenemos que

$$|f(z)|^p = e^{u(z)p} = e^{\left(\int_{\mathbb{R}} logh^p(x-y)P_t(y)dy\right)} \leq \int_{\mathbb{R}} h^p(x-y)P_t(y)dy.$$

Por lo tanto

$$\int |f(z)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h^p(x-y)dx \right) P_t(y)dy = \|h\|_{L^p}^p$$

□

Teorema 36. *Si $f \in H^1(\mathbb{H})$, entonces*

$$f(z) = \int P_t(x-y)f(y)dy,$$

donde $f(x) = \lim_{t\to 0^+} f(x,t)_*$
Inversamente, si μ es una medida compleja en $\mathbb{R}$ tal que

$$P_t * \mu \in Hol(\mathbb{H}),$$

entonces $\mu \ll dA$, de hecho $d\mu = fdA$, donde $f(x) = \lim_{t\to 0^+} \int P_t(x-y)d\mu(y)$

La teoría que hemos visto hasta ahora, nos sirve para probar el siguiente resultado de aplicación en probabilidad, que nos da la posibilidad de obtener funciones distintas pero con la misma suceción de momentos.

Teorema 37. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)dx < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\log f(x)}{1+x^2}dx < \infty$$

entonces $f(x) + \lim_{t\to 0}(1+\cos(v(x,t)))$ y $f(x)+\lim_{t\to 0}(1+sen(v(x,t)))$ tienen la misma sucesión de momentos que f, donde $v(x,y)$ es la ármonica conjugada de $u(x,t) := (P_t * log(f))(x)$

Demostración. Ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\log f(x)}{1+x^2}dx < \infty$$

se tiene que $\log(f) \in L^1\left(\mathbb{R}, \frac{dt}{1+t^2}\right)$, entonces $u(x,t)$ es efectivamente armónica en $\mathbb{H}$. Sabemos que $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \log(f(x))$ c.d en $\mathbb{R}$. Se sigue que $g(x) = e^{u(z)+iv(z)}$ es holomorfa en $\mathbb{H}$, por lo tanto

$$|g(z)| = e^{u(z)} = exp\left(\int_{\mathbb{R}} P_t(x-y)log(f(y))dy\right) \leq \int_{\mathbb{R}} P_t(x-y)f(y)dy)$$

donde hemos usado la desigualdad de Jensen. Para todo $t > 0$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x,t)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} P_t(x-y)dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)dy,$$

es decir $g \in H^1(\mathbb{H})$. Sabemos que existe $\tilde{g}(x) = \lim_{t\to 0^+} g(x,t)$ c.d. en $\mathbb{R}$.
Tenemos que

$$\lim_{t\to 0^+} |g(x,t)| = \lim_{t\to 0^+} e^{u(z)} = e^{\lim_{t\to 0^+} u(z)} = e^{\log f(x)} = f(x)$$

c.d. en $\mathbb{R}$, además $\tilde{g}(x) = f(x)e^{i\lim_{t\to 0^+} v(x,t)}$. Como por el Teorema 34

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\tilde{g}(x)dx = 0$$

y además $\int_{\mathbb{R}} x^n|\tilde{g}(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)dx < \infty$, $\forall n \geq 0$, luego, tenemos que $h^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \geq 0$, luego como

$$\begin{aligned}
h^{(n)}(0) &= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx}\right)^{(n)} \tilde{g}(x)dx|_{t=0} \\
&= \int_{\mathbb{R}} (ix)^n e^{itx}\tilde{g}(x)dx|_{t=0} \\
&= i\int_{\mathbb{R}} x^n \tilde{g}(x)dx,
\end{aligned}$$

pues $\tilde{g}(x)$ es integrable, luego $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^n \tilde{g}(x)dx = 0$ y así

$$Re\left(\int_{\mathbb{R}} x^n \tilde{g}(x)dx\right) = \int_{\mathbb{R}} x^n Re(\tilde{g}(x))dx = \int_{\mathbb{R}} x^n \cos(\lim_{t\to 0^+} v(x,t))dx = 0$$

y

$$Im\left(\int_{\mathbb{R}} x^n \tilde{g}(x)dx\right) = \int_{\mathbb{R}} x^n Im(\tilde{g}(x))dx = \int_{\mathbb{R}} x^n \mathrm{sen}(\lim_{t\to 0^+} v(x,t))dx = 0$$

$\square$

Referencias

[H1] Ribet, S Axler FW Gehring KA, *Graduate Texts in Mathematics 111*, Springer,1987

[H2] Axler, Sheldon and Bourdon, Paul and Wade, Ramey, *Harmonic function theory*, Springer Science & Business Media,2013

[H3] Apostol, Tom M, *Análisis matemático*, Reverté, 1996

[H4] *Análisis matemático*, Clapp, Mónica, UNAM, 2015