La obstrucción de finitud de Wall

Félix Alejandro Medina Lugo
Asesorado por
Luis Jorge Sánchez Saldaña

26 de Junio-11 de Agosto

Índice de contenido

Agradezco al Dr Luis Jorge Sánchez Saldaña por toda la paciencia y apoyo que me proporcionó para poder realizar este trabajo, agradezco a mis compañeros del verano por haber hecho de esta una experiencia inolvidable. Agradezco al Programa para un Avance Global e Integrado de la Matemática Mexicana, proyecto FORDECyT clave 265667

Introducción

El objetivo de este trabajo es el presentar e introducir los conceptos y el lenguaje necesario para presentar el Teorema de obstrucción de finitud de Wall. Entre las herramientas teorícas que se presentaran se encuentran la teoría de módulos proyectivos, grupo fundamental, complejos CW y teoría K-algebraica. El teorema nos permite caracterizar cuando un espacio topológico X es homotópicamente equivalente a un complejo CW finito, en particular mediante un invariante que vive en el grupo $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X,x)])$.

1 Teoría de módulos

En esta sección se plantearan algunos conceptos básicos pero necesarios sobre la teoría de módulos, más especificamente, aquellos necesarios para llegar a la teoría de módulos libres y módulos proyectivos.

1.1 Módulos y homomorfismos

Sea R un anillo asociativo con $1 \neq 0$.

1.1.1 Definición. Un grupo abeliano $(M, +)$ se dice ser un módulo izquierdo sobre R o R-módulo izquierdo si existe una multiplicación por escalar $\eta : R \times M \longrightarrow M$ escrita $(r, m) \mapsto rm$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $(r + s) \cdot m = rm + sm$,
2. $(rs) \cdot m = r \cdot (sm)$,
3. $r \cdot (m + n) = rm + rn$,
4. $1 \cdot m = m$,

para todo $r, s \in R$ y para todo $m, n \in M$.

1.1.2 Observación. Podemos definir R-módulo derecho mediante $\gamma : M \times R \longrightarrow M$ tal que:

1. $m \cdot (r + s) = mr + ms$,
2. $m \cdot (rs) = (mr) \cdot s$,
3. $(m + n) \cdot r = mr + nr$,
4. $m \cdot 1 = m$,

para todo $r, s \in R$ y para todo $m, n \in M$.

Notemos que las definiciones de R-módulo izquierdo y R-módulo derecho difieren únicamente en el segundo punto. A lo largo del texto nos referiremos a los R-módulos izquierdos simplemente como R-módulos.

1.1.3 Ejemplo. Todo anillo R es un R-módulo con las operaciones de suma y producto en el anillo.

1.1.4 Ejemplo. El grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z} - módulo$ donde las propiedades de módulo se siguen de las propiedades de congruencia, es decir:

$$m \cdot (\overline{k}) = (\overline{mk}) \qquad m \in \mathbb{Z}, \overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

1.1.5 Definición. Un subconjunto N de un R-módulo M, se llama *submódulo* de M si N es un subgrupo aditivo de M y para toda $r \in R$, $rN = \{rx \mid x \in N\} \subset N$.

1.1.6 Definición. Sean M y N R-módulos. Una función $f : M \longrightarrow N$ se llama homomorfismo de R-módulos o R-lineal si f es un homomorfismo de grupos tal que $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todo $\alpha \in R$ y para todo $x \in M$.

1.1.7 Definición. Si f es sobreyectiva la llamaremos epimorfismo, si es inyectiva la llamaremos monomorfismo. En el caso que f sea tanto epimorfismo como monomorfismo, diremos que es un isomorfismo, si existe un isomorfismo de R-módulos de M a N diremos que M es isomorfo a N y lo denotamos por $M \cong N$.

1.1.8 Definición. Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo, definimos

$$Ker(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0_N\} \text{ y}$$
$$Im(f) = \{y \in N \mid f(x) = y, x \in M\}.$$

1.1.9 Proposición. $Ker(f) = \{0\}$ *si y sólo si* f *es monomorfismo.*

Demostración. Sea $f : M \longrightarrow N$ un monomorfismo, es decir si $f(x) = f(y)$ tenemos que $x = y$, $x, y \in M$. Sea $x \in Ker(f)$, como f es un homomorfismo se cumple que $f(0) = 0$, así $f(0) = f(x)$ y como f es monomorfismo debe ser que $x = 0$. Supongamos ahora que $Ker(f) = \{0\}$ y sean $x, y \in M$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces $f(x) - f(y) = f(x - y) = 0$ y por lo tanto $x - y \in Ker(f)$, como $Ker(f) = \{0\}$ tenemos que $x - y = 0$ es decir $x = y$.

■

1.1.10 Proposición. *La composición de dos homomorfismos de R-módulos es un homomorfismo de R-módulos*

Demostración. Sean $f : M' \longrightarrow M$ y $g : M \longrightarrow M''$ homomorfismos de R-módulos, entonces

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + y) &= g(f(x + y))\\ &= g(f(x) + f(y))\\ &= g(f(x)) + g(f(y))\\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y).\end{aligned}$$

Además, $(g \circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)) = \alpha(g \circ f)(x)$. Por lo tanto $g \circ f$ es un homomorfismo de R-módulos. ■

1.1.11 Proposición. *Sean $f : M' \longrightarrow M$ y $g : M \longrightarrow M''$ homomorfismos de R-módulos y $h = g \circ f$ la composición, se cumple que*

1. *Si h es un monomorfismo, entonces f es un monomorfismo.*
2. *Si h es un epimorfismo, entonces g es un epimorfismo.*

Demostración. 1. Sean $x, y \in M$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces $h(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = h(y)$. Como h es un monomorfismo, tenemos que $x = y$. Por lo tanto f es un monomorfismo.

2. Como h es un epimorfismo tenemos que $h(M) = M''$, entonces $M'' = g(f(M)) \subset g(M) \subset M''$, y así $g(M) = M''$, por lo tanto g es un epimorfismo.

■

1.1.12 Teorema. ***(Primer teorema de isomorfismo para módulos)*** *Sean M, N R-módulos y $\varphi : M \longrightarrow N$ un epimorfismo, entonces*

$$M/Ker(\varphi) \cong N.$$

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/Ker\varphi. & \end{tikzcd}$$

Como φ en partircular es un homomorfismo sobreyectivo de grupos, por el primer teorema de isomorfismo de grupos tenemos que existe un homomorfismo biyectivo de grupos $\overline{\varphi} : M/Ker(\varphi) \longrightarrow N$ que hace conmutar al diagrama, i.e.

$$\overline{\varphi}(x + Ker(\varphi)) = \varphi(x).$$

Falta verificar que $\overline{\varphi}$ es homomorfismo de módulos. Sea $\alpha \in R$ y $x \in M$, entonces

$$\alpha\overline{\varphi}(x + Ker(\varphi) = \alpha\varphi(x) = \varphi(\alpha x) = \overline{\varphi}(\alpha x + Ker(\varphi)).$$

Por lo tanto $\overline{\varphi}$ es isomorfismo de módulos.

■

1.2 Suma directa y sucesiones exactas

1.2.1 Definición. Sea I un conjunto de indices y $(M_i)_{i\in I}$ una familia de R-módulos, definimos

$$\oplus_{i\in I} M_i = \{f : I \longrightarrow \cup_{i\in I} M_i \mid f(i) = 0 \ \ \forall i \in I - J, |J| < \infty, f(i) \in M_i\}$$

como *la suma directa* de la familia $(M_i)_{i\in I}$. Equivalentemente $\oplus_{i\in I} M_i$ se puede definir mediante sumas formales.

1.2.2 Observación. $\oplus_{i\in I} M_i$ tiene estructura de R-módulo con las operaciones $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$ y $(\alpha f)(i) = \alpha f(i)$.

1.2.3 Teorema. ***(Propiedad universal de la suma directa)*** *Si M es un R-módulo y $\{\varphi_j : M_j \longrightarrow M\}_{j\in I}$ es una familia de homomorfismos, entonces existe un único homomorfismo $\varphi : \oplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ tal que $\varphi \circ i_j = \varphi_j$ para todo $j \in I$, donde $i_j : M_j \longrightarrow \oplus_{i\in I} M_i$ es la inyección natural.*

Demostración. Sea $\varphi : \oplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ tal que $\varphi((x_i)_{i\in I}) = \sum_{j\in J} \varphi_j(x_j)$.

Esto es posible ya que el lado derecho es una suma finita, veamos que es un homomorfismo. Sean $(x_i)_{i\in I}, (x_i')_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} M_i$ y $\alpha \in R$.

1.

$$\begin{aligned}
\varphi((x_i)_{i\in I} + (x'_i)_{i\in I}) &= \varphi((x_i + x'_i)_{i\in I}) \\
&= \sum_{j\in J} \varphi_j(x_j + x'_j) \\
&= \sum_{j\in J} (\varphi_j(x_j) + \varphi_j(x'_j)) \\
&= \sum_{j\in J} \varphi_j(x_j) + \sum_{j\in J} \varphi_j(x'_j) \\
&= \varphi((x_i)_{i\in I}) + \varphi((x'_i)_{i\in I}).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha(x_i)_{i\in I}) &= \varphi((\alpha x_i)_{i\in I}) \\
&= \sum_{j\in J} \varphi_j(\alpha x_j) \\
&= \sum_{j\in J} \alpha\varphi_j(x_j) \\
&= \alpha \sum_{j\in J} \varphi_j(x_j) \\
&= \alpha\varphi((x_i)_{i\in I}).
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\varphi \circ i_j = \varphi_j$. Sea $x \in M_l, l \in I$, tenemos que $i_l(x) = ((x_i)_{i\in I})$ con $x_i = 0$ si $i \neq l$ y $x_i = x$ si $i = l$

$$\begin{aligned}
\varphi \circ i_l(x) &= \varphi(i_l(x)) \\
&= \varphi((x_i)_{i\in I}) \\
&= \sum_{j\in J} \varphi_j(x_j) \\
&= \varphi_l(x),
\end{aligned}$$

por lo tanto $\varphi \circ i_l = \varphi_l$.
Veamos ahora que es única. Sea $\psi : \oplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ un homomorfismo tal que $\psi \circ i_j = \psi_j$ para todo $j \in I$. Podemos escribir a todo $x = (x_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} M_i$ como $(x_i)_{i\in I} = \sum_{j\in J}(i_j(x))$, entonces

$$\begin{aligned}\psi((x_i)_{i\in I}) &= \psi(\sum_{j\in J} i_j(x)) \\ &= \sum_{j\in J} \psi(i_j(x)) \\ &= \sum_{j\in J} \varphi_j(x_j) \\ &= \varphi((x_i)_{i\in I}),\end{aligned}$$

por lo tanto $\psi = \varphi$.

■

1.2.4 Teorema. *Sean N, N' submódulos de M tales que $N \cap N' = \{0\}$ y $N + N' = M$, donde $N + N' = \{n + n' \mid n \in N, n' \in N'\}$. Entonces $\varphi : N \oplus N' \longrightarrow M$ dado por $\varphi((y, y')) = y + y'$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sean $\psi : N \longrightarrow M, \psi' N' \longrightarrow M$ las inclusiones, las cuales son homomorfismos, por lo que existe un único $\varphi : N \oplus N' \longrightarrow M$ tal que:

$$\varphi \circ i = \psi \;\; y \;\; \varphi \circ i' = \psi',$$

donde i, i' son las inclusiones en la suma directa, falta ver que φ es biyectiva. Si $\varphi(y, y') = 0$, tenemos que $y = -y' \in N \cap N' = \{0\}$, es decir $Ker(\varphi) = \{0\}$, por lo que φ es un monomorfismo. Ahora, como $N + N' = M$ es claro que φ es un epimorfismo. Por lo tanto φ es isomorfismo. ■

1.2.5 Teorema. *Sean $f : M' \longrightarrow M$ y $g : M \longrightarrow M''$ homomorfismos de módulos tales que $g \circ f$ es isomorfismo. Entonces*

$$M \cong Im(f) \oplus Ker(g).$$

Demostración. Veamos que $Im(f) + Ker(g) = M$. Sea $x \in M$ y $g(x) \in M''$, como $g \circ f : M' \longrightarrow M''$ es un isomorfismo, entonces existe $y \in M'$ tal que $gf(y) = g(x)$. Definimos $z = f(y) \in Im(f)$ y $z' = x - z$, así $g(z') = g(x - z) = g(x) - g(z) = gf(y) - g(f(y)) = 0$ por lo que $z \in Ker(g)$ y por lo tanto $z + z' = x \in Im(f) + Ker(g)$.

Falta ver que $Im(f) \cap Ker(g) = 0$, sea $x \in Im(f) \cap Ker(g)$ entonces existe $y \in M'$ tal que $f(y) = x$ y $g(x) = 0$ y así $gf(y) = g(x) = 0$.

Como gf es isomorfimo tenemos que $y = 0$ y $f(y) = 0 = x$ pues f es homomorfismo. Por lo tanto $M \cong Im(f) \oplus Ker(g)$

$\blacksquare$

1.2.6 Definición. Sea

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

una sucesión de R-módulos y R-homomorfismos, diremos que es *semiexacta* en M_i si $Im(f_{i-1}) \subset Ker(f_i)$. Si es semiexacta en cada módulo la llamaremos *sucesión semiexacta*. Notemos que $f_j \circ f_{j+1} = 0$. Una sucesión que cumple esta condición se le llama *complejo de cadenas*.

1.2.7 Definición. Diremos que una sucesión es exacta en M_i si es semiexacta y $Im(f_{i-1}) \supset Ker(f_i)$, si es exacta en cada módulo la llamaremos *sucesión exacta*.

A una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

la llamaremos *sucesión exacta corta*.

1.2.8 Observación. Equivalentemente diremos que es exacta si $Im(f_{i-1}) = Ker(f_i)$.

1.2.9 Observación. En una sucesión exacta corta tenemos que f es un monomorfismo y g es un epimorfismo, la cual reescribiremos como

$$M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''.$$

1.2.10 Ejemplo. Sea N un submódulo de M, consideremos el módulo cociente M/N. Sea $i : N \longrightarrow M$ el monomorfismo de inclusión y $\pi : M \longrightarrow M/N$ el epimorfismo de proyección, entonces

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta.

1.2.11 Definición. Diremos que una sucesión exacta corta

$$M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M'',$$

se escinde si existe un homomorfismo $g' : M'' \longrightarrow M$ tal que $gg' = 1_{M''}$.

1.2.12 Observación. $M' \overset{f}{\rightarrowtail} M' \oplus M'' \overset{g}{\twoheadrightarrow} M''$ es exacta y se escinde con $g' = i_2 : M'' \longrightarrow M' \oplus M''$.

Denotamos el conjunto de los homomorfismos de R-módulos de M a N mediante $Hom_R(M, N')$.

1.2.13 Observación. $Hom_R(M, N)$ es un grupo abeliano con la operación $(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ f, g \in Hom_R(M, N)$ para todo anillo R y para todo M, N R-módulo. Ahora sea $\alpha \in R$ con R un anillo conmutativo, definimos el producto escalar $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, así dotamos a $Hom_R(M, N)$ con estructura de R-módulo.

1.2.14 Definición. Sea $\psi \in Hom_R(N', N)$, definimos

$$\psi_* : Hom_R(M, N') \longrightarrow Hom_R(M, N),$$

dada por $\psi_*(f) = \psi \circ f$ para cualquier M R-módulo. A ψ_* le llamamos el homomorfismo inducido por ψ.

1.2.15 Proposición. *Sea $N' \overset{\psi}{\rightarrowtail} N \overset{\psi'}{\longrightarrow} N''$ una sucesión exacta de R-módulos. Entonces para cualquier R-módulo M, la sucesión inducida*

$$0 \longrightarrow Hom_R(M, N') \overset{\psi_*}{\longrightarrow} Hom_R(M, N) \overset{\psi'_*}{\longrightarrow} Hom_R(M, N'') \qquad (1)$$

es exacta.

Demostración. Veamos que ψ_* es un monomorfismo: Supongamos que $\psi_*(f) = 0$, es decir $(\psi \circ f)(y) = 0$ para toda $y \in M$ y para toda $f \in Hom_R(M, N')$.
Como ψ es un monomorfismo, $Ker(\psi) = \{0\}$, entonces $f(y) = 0$ para todo $y \in M$, lo que implica que $f = 0$ y por lo tanto ψ_* es un monomorfismo.

Ahora demostraremos (1) es exacta en $Hom_R(M, N)$

1. $Im\psi_* \subset Ker\psi'_*$. Sea $g \in Im\psi_*$ entonces $g = \psi \circ f, f \in Hom_R(M, N')$. Luego
$$\psi'_*(g) = \psi' \circ g = \psi' \circ \psi \circ f = 0,$$
pues $\psi' \circ \psi = 0$ debido a que la sucesión $N' \overset{\psi}{\rightarrowtail} N \overset{\psi'}{\longrightarrow} N''$ es exacta. Por lo tanto ψ_* es un monomorfismo.

2. $Ker\psi'_* \subset Im\psi_*$. Sea $g \in Ker\psi'_*$, i.e. $\psi'_*(g) = 0$, entonces $\psi' \circ g = 0$. Queremos ver que existe $f : M \longrightarrow N'$ tal que $\psi_*(f) = g = \psi \circ f$. Sea $x \in M$, entonces $\psi' g(x) = 0$ y así $g(x) \in Ker\psi' = Im\psi$ por lo que existe un único $y \in N'$ tal que $\psi(y) = g(x)$, pues ψ es un monomorfismo. Definamos $f : M \longrightarrow N'$ mediante $f(x) = y = \psi^{-1} g(x)$, por lo tanto $\psi(f) = g$.

$\blacksquare$

1.3 Módulos libres y proyectivos

1.3.1 Definición. Sea M un R-módulo y $A \subseteq M$, diremos que M es libre sobre A (o que A es un conjunto libre de generadores de M) si para todo $x \in M, x \neq 0$, existen únicos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ y $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ tales que

$$x = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Al definir una transformación lineal entre espacios vectoriales, basta con definir las imágenes de los elementos de la base del dominio y así extender linealmente hacia una transformación lineal. De manera similar, si tenemos un R-módulo libre podemos tomar una función cuyo dominio es el conjunto de generadores y apartir de ella extender a un homomorfismo cuyo dominio es el conjunto libre generado.

1.3.2 Teorema. ***(Propiedad universal de R-módulos libres)*** *Sea L un R-módulo libre con base A, para cualquier R-módulo M y función $\varphi : A \longrightarrow M$, existe un único homomorfismo de R-módulos $\phi : L \longrightarrow M$ tal que $\varphi = \phi \circ i$.*

Demostración. Sea $x \in L$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$, definimos

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi(a_i).$$

Veamos que es homomorfismo, sean $x, y \in L$ y $\alpha \in R$

1.

$$\begin{aligned}
\phi(x+y) &= \phi(\sum_{i=1}^{n} r_i a_i + \sum_{j=1}^{m} s_j b_j) \\
&= r_1\varphi(a_1) + \ldots r_n\varphi(a_n) + s_1\varphi(b_1) + \cdots + s_m\varphi(b_m) \\
&= (r_1\varphi(a_1) + \ldots r_n\varphi(a_n)) + (s_1\varphi(b_1) + \cdots + s_m\varphi(b_m)) \\
&= \phi(x) + \phi(y).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha x) &= \phi(\alpha \sum_{i=1}^{n} r_i a_i) \\
&= \phi(\sum_{i=1}^{n} (\alpha r_i) a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha r_i)\varphi(a_i) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi(a_i) \\
&= \alpha\phi(x).
\end{aligned}$$

■

1.3.3 Teorema. *Todo R-módulo M es cociente de un R-módulo libre.*

Demostración. Sea $X \subseteq M$ tal que $\langle X \rangle = M$. En particular podemos tomar $X = M$. Sea L el R-módulo libre generado por X, así la inclusión $f : X \longrightarrow M$ se extiende a un homomofismo $\phi : L \longrightarrow M$. Como $X = f(X) \subseteq \phi(L) \subset M$ y $X = M$ vemos que $\phi(L) = M$. Así ϕ es un epimorfismo, y por el primer teorema de isomorfismo (1.1.12)

$$M \cong L/Ker\phi.$$

■

1.3.4 Teorema. *Si L es un R-módulo libre con base X entonces es isomorfo a $\oplus_{j\in X} R_j$, donde R_j es copia de R.*

Demostración. Sea $x \in L$, entonces $x = \sum_{j\in X} \lambda_j x_j$. Definimos $\eta :\longrightarrow \oplus_{j\in X} R_j$ mediante $\eta(x) = (\lambda_j)_{j\in X}$ y $\rho_j : R_j \longrightarrow L$ mediante $\rho_j(\lambda_j) = \lambda_j x_j$. Por la propiedad universal de la suma directa obtenemos un homomorfismo $\rho : \oplus_{j\in X} R_j \longrightarrow L$. Así

$$\begin{aligned}
\rho \circ \eta(x) &= \rho(\lambda_j)_{j\in X} \\
&= \sum_{j\in X} \rho_j(\lambda_j) \\
&= \sum_{j\in X} \lambda_j x_j \\
&= x.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\rho \circ \eta = 1_L$, análogamente $\eta \circ \rho = 1_{\oplus_{j\in X} R_j}$. ■

1.3.5 Definición. Un R-módulo P se llamará proyectivo si para todo homomorfismo $f : P \longrightarrow N''$ y para todo epimorfismo $\psi' : N \longrightarrow N''$ de R-módulos, existe un homomorfismo $h : P \longrightarrow N$ tal que $\psi' \circ h = f$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

1.3.6 Proposición. *Sea P un R-módulo, P es proyectivo si y sólo si para toda $N' \overset{\psi}{\rightarrowtail} N \overset{\psi'}{\twoheadrightarrow} N''$ sucesión exacta corta, la sucesión inducida*

$$0 \longrightarrow Hom_R(P, N') \xrightarrow{\psi_*} Hom_R(P, N) \xrightarrow{\psi'_*} Hom_R(P, N'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Supongamos que P es proyectivo, por la proposición 1.2.15, sólo nos queda mostrar que ψ'_* es un epimorfismo. Tenemos que ψ'_* es un epimorfismo si y sólo si para todo $f \in Hom_R(P, N'')$ existe $h \in Hom_R(P, N)$ tal que $\psi'_*(h) = f$. Como P es proyectivo y ψ' es un epimorfismo, tenemos que existe $h : P \longrightarrow N$ tal que $f = \psi' \circ h = \psi'_*(h)$. Por lo tanto ψ'_* es un epimorfismo. Ahora supongamos que para toda sucesión exacta corta $N' \overset{\psi}{\rightarrowtail} N \overset{\psi'}{\twoheadrightarrow} N''$ la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow Hom_R(P, N') \xrightarrow{\psi_*} Hom_R(P, N) \xrightarrow{\psi'_*} Hom_R(P, N'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

Sea $f : P \longrightarrow N''$ un homomorfismo, como ψ'_* es epimorfismo tenemos que existe $h : P \longrightarrow N$ tal que $\psi \circ h = f$, es decir, P es proyectivo.

■

1.3.7 Lemma. *Si L es un R-módulo libre, entonces L es proyectivo. Es decir para todo $f \in Hom_R(L, N'')$ y para todo $\psi' : N \longrightarrow N''$ epimorfismo, existe un homomorfismo $h : L \longrightarrow N$ tal que $f = \psi' \circ h$.*

Demostración. Sea L un R-módulo libre con base $X \subset L$. Para todo $x_i \in X$ tenemos que $f(x_i) \in N''$ y como ψ' es un epimorfismo, se sigue que para cualquier $x_i \in X$ existe $g(x_i) \in N$ con $g : X \longrightarrow N$ tal que $\psi'(g(x_i)) = f(x_i)$. Ahora como L es libre, $g : X \longrightarrow N$ se extiende a un homomorfismo $h : L \longrightarrow N$ con $g(x_i) = h(x_i)$ para todo $x_i \in X$. Luego, como $\langle X \rangle = L$, podemos escribir a x como $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ con $\lambda_i \in R, x_i \in X$ para cada $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
\psi'(h(x)) &= \psi'(h(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi'(h(x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi'(g(x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \\
&= f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Y por lo tanto $\psi' \circ h = f$.

$\blacksquare$

1.3.8 Teorema. *$P = \oplus_{i \in I} P_i$ es un R-módulo proyectivo si y sólo si P_i es proyectivo para todo $i \in I$*

Demostración. Veamos el caso $i = 1, 2$, el caso general es análogo. Sea $P = P_1 \oplus P_2$ un R-módulo proyectivo, veamos que P_2 es proyectivo.
Sean $f : P_2 \longrightarrow N'', \psi' : N \twoheadrightarrow N'', i_2 : P_2 \longrightarrow P$ y $\pi_2 : P \longrightarrow P_2$ homomorfismos en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi_2"] & P \arrow[d, "f"] & \\
N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como P es proyectivo, existe $h : P \longrightarrow N$ homomorfismo que hace conmutar el diagrama, es decir $\psi' \circ h = f \circ \pi_2$. Sea $k = h \circ i_2 : P_2 \longrightarrow N$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "k"'] & P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "h"] & P_2 \arrow[d, "f"] & \\
& & N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Luego

$$\psi' \circ k = \psi' \circ h \circ i_2 = f \circ \pi_2 \circ i_2 = f.$$

Pues $\pi_2 \circ i_2 = 1_{P_2}$, por lo tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& P_2 \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "f"] & \\
N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por lo que P_2 es proyectivo. La demostración para P_1 es análoga. Supongamos ahora que P_1 y P_2 son proyectivos, sean $\psi' : N \twoheadrightarrow N''$, $h : P = P_1 \oplus P_2 \longrightarrow N, h_j = h \circ i_j : P_j \longrightarrow N''$. Como P_1 y P_2 son proyectivos, existen k_1, k_2 tales que $\psi' \circ k_1 = h_1$ y $\psi' \circ k_2 = h_2$, veamos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "k_2"'] \arrow[dr, "h_2"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[d, "h"] & \\
& N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & P_1. \arrow[ul, "k_1"] \arrow[u, "h_1"'] \arrow[uu, bend right, "i_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de la suma directa (1.2.3) existe un único homomorfismo $k : P \longrightarrow N$ tal que $k \circ i_1 = k_1$ y $k \circ i_1 = k_2$. Entonces

$$\psi' \circ k \circ i_j = \psi' \circ k_j = h_j = h \circ i_j.$$

Y por la unicidad de k tenemos que $\psi' \circ k = h$

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "f"] & \\
N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

■

1.3.9 Teorema. *Sea P un R-módulo. Entonces los siguientes postulados son equivalentes:*

1. *P es proyectivo.*

2. *Toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

se escinde.

3. *P es un sumando directo de un R-módulo libre.*

4. *Para cualquier sucesión exacta corta $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$ la sucesión inducida*

$$0 \longrightarrow Hom_R(P, N') \longrightarrow Hom_R(P, N) \longrightarrow Hom_R(P, N'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$ Supongamos que P es proyectivo. Entonces, para toda $g : N \longrightarrow P$ y $1_P : P \longrightarrow P$, existe $h : P \longrightarrow N$, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $1_P = g \circ h \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] \arrow[l, bend left, "h"] & 0, \end{tikzcd}$$

es decir, se escinde.
$2 \Rightarrow 3$ Por el teorema 1.3.3 tenemos que P es isomorfo al cociente de un R-módulo libre L y por lo tanto existe un epimorfismo $g : L \longrightarrow P$. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Ker(g) \longrightarrow L \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis existe $h : P \longrightarrow L$ tal que $1_P = g \circ h$, donde claramente 1_P es un isomorfismo y por consecuencia del teorema 1.2.5 tenemos que:

$$L \cong Im(h) \oplus Ker(g).$$

Ahora, como 1_P es un monomorfismo, por 1.1.11 se sigue que h es monomorfismo. Por lo tanto

$$P \cong Im(h).$$

$3 \Rightarrow 1$ Como todo R-módulo libre es proyectivo y todo sumando directo de un proyectivo es proyectivo es proyectivo, la equivalencia es inmediata.
$1 \Leftrightarrow 4$ Esta equivalencia se probo en 1.3.6.

$\blacksquare$

2 $K_0(R)$

En esta sección abordaremos algunos conceptos importantes como el grupo abeliano $K_0(R)$ de un anillo R, cabe mencionar que podemos asignar la secuencia de grupos abelianos $K_i(R)$, pero para nuestros fines bastará el concepto de K_0. Para más información sobre Teoría de módulos y K_0, consulte [LP05].

2.0.1 Definición. Sea M un conjunto y $+ : M \times M \longrightarrow M$, llamamos a $(M, +)$ un monoide si satisface las siguientes propiedades

1. $(m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3)$.
2. Existe $0 \in M$ tal que $m + 0 = m$.

Para todo $m, m_1, m_2, m_3 \in M$.

2.0.2 Lemma. *Sea R un anillo y* ***Proj****(R) el conjunto de las clases de isomorfirmo de R-módulos proyectivos finitamente generados. Así (****Proj****(R),$\oplus$) tiene estructura de monoide abeliano con identidad el R-módulo 0. Es claro que si $P, Q \in$* ***Proj****(R) entonces $P \oplus Q \in$* ***Proj****(R) pues el teorema 1.3.8 nos dice que suma directa de módulos proyectivos es un módulo proyectivo y además suma directa de finitamente generados es finitamente generado.*

1. *Bien definida: Sean $P, P' \in [P]$, es decir $P \cong P'$ y $Q, Q' \in [Q]$, entonces $P \oplus Q \cong P' \oplus Q'$, o bien $[P \oplus Q] = [P' \oplus Q]$.*
2. *Suma: Claramente la suma directa de dos clases de módulos es isomorfo a la clase de la suma directa de los representantes,*
$$[P] \oplus [Q] = [P \oplus Q].$$
3. *Neutro: La clase del R-módulo trivial actua como neutro en nuestro monoide,*
$$[P] \oplus [0] = [P \oplus 0] = [P].$$
4. *Asociatividad:*
$$([P]\oplus[Q])\oplus[V] = [P\oplus Q]\oplus[V] = [P\oplus Q\oplus V] = [P]\oplus[Q\oplus V] = [P]\oplus([Q]\oplus[V]).$$
5. *Conmutatividad:*
$$[P] \oplus [Q] = [P \oplus Q] = [Q \oplus P] = [Q] \oplus [P].$$

De esta manera logramos asociarle a un anillo R un monoide abeliano R, nos interesa ahora poder asociarle a R un grupo abeliano que respete la operación en R, este grupo será el que llamaremos $K_0(R)$.

2.0.3 Definición. Sea R un anillo, F el grupo abeliano libre cuyos generadores $[P]$ son las clases de isomorfismos de R-módulos proyectivos finitamente generados y H el subgrupo de F generado por todas las expresiones de la forma

$$[P] + [Q] - [P \oplus Q].$$

Como F es abeliano tenemos que H es un subgrupo normal de F, así definimos

$$K_0(R) = F/H = \mathbb{Z}[Proj(R)]/\langle [P] + [Q] - [P \oplus Q] \rangle.$$

$K_0(R)$ se llama *grupo de clases proyectivas de R.*

2.0.4 Ejemplo. Sea $R = K$ un campo, sabemos que un campo es un caso particular de un anillo. Así los K-módulos proyectivos finitamente generados son los espacios vectoriales de dimensión finita y por lo tanto tenemos que

$$\mathbf{Proj}(K) = \{[0], [K], [K^2], [K^3], \dots\}.$$

Claramente existe una biyección entre $\mathbf{Proj}(K)$ y $\mathbb{N} \cup \{0\}$ dado por la dimensión del representante de la clase. Como la completación del monoide $\mathbb{N} \cup \{0\}$ a un grupo es $\mathbb{Z}$, tenemos que

$$K_0(K) \cong \mathbb{Z}.$$

Veamos que efectivamente existe el isomorfismo. Denotemos por $\overline{M}$ la imagen de $[M]$ en $K_0(K)$, definimos $\psi(\overline{M}) = dim(M)$, veamos que es isomorfismo.
Lo primero que hay que verificar es que nuestra función está bien definida, observemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
F/H \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d] & \mathbb{Z} \\
0 &
\end{tikzcd}$$

donde φ está definido por $\varphi([M]) = dim(M)$ y F, H son los que se mencionaron en la definición anterior. Podemos ver que φ está bien definido y es homomorfismo ya que si $[M] = [N]$ entonces $dim(M) = dim(N)$ y

$$\begin{aligned}
\varphi([M] + [N]) &= \varphi([M \oplus N]) \\
&= dim(M \oplus N) \\
&= dim(M) + dim(N) \\
&= \varphi([N]) + \varphi([N]).
\end{aligned}$$

Por la propiedad universal del cociente, para que ψ este bien definida hay que verificar que $\varphi(H) = \{0\}$.
Sea $[P] + [Q] - [P \oplus Q]$ en H, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi([P] + [Q] - [P \oplus Q]) &= \varphi([P]) + \varphi([Q]) - \varphi([P \oplus Q]) \\
&= dim(P) + dim(Q) - dim(P \oplus Q) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto ψ está bien definida. Veamos que es suprayectiva, como $\psi(\overline{K}) = 1$ ya acabamos pues 1 es generador de $\mathbb{Z}$.
Ahora, si $\psi(\overline{M}) = 0$ tenemos que $dim(M) = 0$ y por lo tanto $M = 0$, así $\overline{M} = 0$ y ψ es inyectiva.

El ejemplo siguiente nos ayuda a entender por qué se consideran los módulos finitamente generados.

2.0.5 Ejemplo. (Eilenberg swindle) Sea R un anillo y tomemos el monoide de las clases de isomorfimos de módulos proyectivos generados por un conjunto numerable, sea R^∞ un módulo libre generado por una base numerable. Si $P \oplus Q \cong R^\infty$ entonces

$$P \oplus R^\infty \cong P \oplus (Q \oplus P) \oplus (Q \oplus P) \oplus \ldots \cong (P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus \ldots \cong R^\infty$$

Dos elementos se vuelven isomorfos al sumarlos con $[R^\infty]$. Por lo que el grupo asociado a este monoide es el grupo trivial.

2.0.6 Teorema. *Para cualquier grupo H y cualquier homomorfismo ψ : $\boldsymbol{Proj}(R) \longrightarrow H$ existe un único homomorfismo $\theta : K_0(R) \longrightarrow H$ tal que $\psi = \theta \circ \varphi$ donde $\varphi : \boldsymbol{Proj}(R) \longrightarrow K_0(R)$ es el homomorfismo natural.*

$$\begin{tikzcd}
H & \\
\boldsymbol{Proj}(R) \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"'] & K_0(R). \arrow[ul, dashed, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

Demostración. Definimos $\overline{\theta}: \mathbb{Z}[\mathbf{Proj}(R)] \longrightarrow H$ tal que $\overline{\theta}([M]) = \psi([M])$. Está bien definida pues $\mathbb{Z}[\mathbf{Proj}(R)]$ es abeliano libre y debido a que los elementos de la imagen de ψ conmutan, ya que $\mathbf{Proj}(R)$ es abeliano, notemos que también es un homomorfismo. Para ver que $\overline{\theta}$ deciende un homomorfismo $\theta : K_0(R) \longrightarrow H$ en el cociente, hay que verificar que
$\langle [P] + [Q] - [P \oplus Q] \rangle \subset Ker(\overline{\theta})$.

$$\begin{aligned}
\overline{\theta}([P] + [Q] - [P \oplus Q]) &= \overline{\theta}([P]) + \overline{\theta}([Q]) - \overline{\theta}([P \oplus Q]) \\
&= \psi([P]) + \psi([Q]) - \psi([P \oplus Q]) \\
&= \psi([P] + [Q]) - \psi([P \oplus Q]) \\
&= \psi([P \oplus Q]) - \psi([P \oplus Q]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La unicidad de θ viene dada por el hecho de que nuestra función este definida en generadores, por lo que cualquier otra función θ' que cumpla $\psi = \theta' \circ \varphi$ debera coincidir en los generadores y por lo tanto en todo el grupo.

■

2.0.7 Definición. Definimos el grupo K_0 reducido de R como el cociente

$$\tilde{K_0}(R) = K_0(R)/L,$$

donde L es el subrgrupo de $K_0(R)$ generado por las clases de isomorfismos de R-módulos libres finitamente generados.

2.0.8 Observación. Si $R = K$ es un campo, $\tilde{K_0}(K) = 0$, pues todos los módulos proyectivos finitamente generados son módulos libres finitamente generados.

2.0.9 Teorema. *Sean P y Q dos R-módulos proyectivos finitamente generados. Entonces $\overline{P} = \overline{Q}$ en $K_0(R)$ si y sólo si existe un entero $n \geq 0$ tal que $P \oplus R^n \cong Q \oplus R^n$.*

Demostración. Supongamos que $[P] \equiv [Q] (mod\ H)$, es decir $[P]$ y $[Q]$ son representantes de la misma clase en $K_0(R)$. Entonces

$$[P] - [Q] = \sum_i ([P_i] + [Q_i] - [P_i \oplus Q_i]) - \sum_j ([T_j] + [S_j] - [T_j \oplus S_j]).$$

Luego

$$[P] + (\sum_j ([T_j] + [S_j] - [T_j \oplus S_j])) = [Q] + (\sum_i ([P_i] + [Q_i] - [P_i \oplus Q_i])).$$

Como los términos entre paréntesis son ismorfos, los representamos por N y tenemos que $P \oplus N \cong Q \oplus N$, ahora como N es suma directa de módulos proyectivos finitamente generados, N también lo es, por lo que existe un R-módulo M tal que $N \oplus M \cong R^n$, ya que $N \oplus M$ es libre y finitamente generado. Luego $P \oplus N \oplus M \cong Q \oplus N \oplus M$ y por lo tanto $P \oplus R^n \cong Q \oplus R^n$.

Ahora supongamos que $P \oplus R^n \cong Q \oplus R^n$ entonces $\overline{P \oplus R^n} = \overline{Q \oplus R^n}$, luego $\overline{P} + \overline{R^n} = \overline{Q} + \overline{R^n}$ y por lo tanto $\overline{P} = \overline{Q}$, pues $K_0(R)$ es un grupo.

■

3 Complejos CW

Las siguientes definiciones se pueden encontrar en [Han]. Comencemos recordando algunas definiciones simples. Definimos el n-disco en $\mathbb{R}^n$:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \; \| x \| \leqslant 1\},$$

donde $\| \cdot \| \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ es la norma usual en $\mathbb{R}^n$.
El n-disco abierto denotado por $int(D^n)$ está definido por

$$int(D^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \; \| x \| < 1\}$$

y la frontera del n-disco es la $(n-1)$-esfera

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \; \| x \| = 1\}.$$

Notemos que el 0-disco D^0 coincide con $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ por definición y tenemos que $int(D^0) = D^0 = \{0\}$.

3.0.1 Definición. Una n-célula es un espacio homeomorfo al n-disco abierto $int(D^n)$. Una célula es un espacio tal que es una n-célula para algún $n \geqslant 0$.

Notemos que $int(D^n)$ y $int(D^m)$ son homeomorfos si y sólo si $m = n$, esto se sigue de que $int(D^k)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ si y sólo si $m = n$. Por lo que podemos hablar de la dimensión de una célula, diremos que una n-célula tiene dimensión n.

3.0.2 Definición. Una descompisición celular de un espacio topológico X es una familia $\mathcal{E} = \{e_\alpha \mid \; \alpha \in I\}$ de subespacios de X tal que e_α es una célula para cada $\alpha \in I$ y

$$X = \coprod_{\alpha \in I} e_\alpha,$$

la unión disconjunta de conjuntos.
Definimos el n-esqueleto de X como el subespacio

$$X^n = \coprod_{\alpha\in I|dim(e_\alpha)\leqslant n} e_\alpha$$

3.0.3 Definición. Llamaremos a la pareja $(X,\mathcal{E})$ complejo CW, donde X es un espacio de Hausdorff y $\mathcal{E}$ es una descomposición celular de X si los siguientes axiomas se satisfacen:

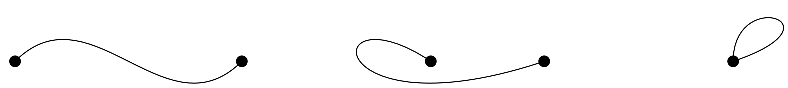
1. Para cada n-célula $e \in \mathcal{E}$ existe $\phi_e : D^n \longrightarrow X$ que al restringirlo a $int(D^n)$ induce un homomorfismo $\phi_e \mid_{int(D^n)}: int(D^n) \longrightarrow e$ y mapea S^{n-1} en X^{n-1}.

2. Para cualquier célula $e \in \mathcal{E}$ la cerradura $\overline{e}$ intersecta solo un número finito de células en $\mathcal{E}$.

3. Un subconjunto $A \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $A \cap \overline{e}$ es cerrado en X para todo $e \in \mathcal{E}$

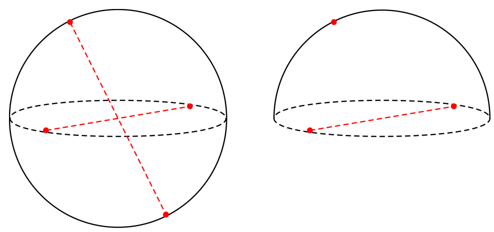
Diremos que un complejo CW es finito si $\mathcal{E}$ es finito.

3.0.4 Ejemplo. Un complejo CW de dimensión $1, X = X^1$ es lo que se conoce como gráfica en topología algebraica. Consiste de vértices (0-células) a los cuales se les agregan aristas (1-células), ambos extremos de una 1-célula pueden estar adheridas a un mismo vertice.



3.0.5 Ejemplo. La esfera S^n tiene estructura de complejo CW con dos células, una 0-célula e_0 y una n-célula e_n donde e_n es adherida mediante el mapeo constante $S^{n-1} \longrightarrow e_0$. Esto es equivalente a definir la esfera como el espacio cociente $D^n/\partial D^n$

3.0.6 Ejemplo. Recordemos que el n-espacio real proyectivo $\mathbb{R}P^n$ puede definirse como el espacio cociente $S^n/(v \sim -v)$, la esfera con puntos antípodas identificados. Esto es equivalente a definirla como el hemisferio D^n con puntos antípodas de ∂D^n identificados.



Y como ∂D^n identificada con puntos antípodas es precisamente $\mathbb{R}P^{n-1}$ observamos que $\mathbb{R}P^n$ se obtiene de $\mathbb{R}P^{n-1}$ agregando una n-célula mediante la proyección $S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$. Se sigue por inducción sobre n que $\mathbb{R}P^n$ tiene estructura de complejo CW, $e_0 \cup e_1 \cup e_2 \cup \cdots \cup e_n$, con e_i de dimensión i.

4 Grupo fundamental

En está sección definiremos algunos conceptos muy importantes en la topología algebraica, el de homotopía y grupo fundamental de un espacio topológico. Puede encontrar más sobre este tema en [Hat02], [Cis01] y [Cha05]

4.1 Homotopías

4.1.1 Definición. Sean X y Y espacios topológicos. Definimos como homotopía a una familia de funciones $\{f_t : X \longrightarrow Y\}_{t\in[0,1]}$ tal que la función asociada $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ dada por $H(x,t) = f_t(x)$ es continua.

Decimos que dos funciones $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ son **homotópicas** si existe una homotopía $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tal que $F(x,0) = f_0(x)$ y $F(x,1) = f_1(x)$. Denotamos que f_0 y f_1 son homotópicas como $f_0 \simeq f_1$.

4.1.2 Definición. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica si existe una función $g : Y \longrightarrow X$ tal que $fg \simeq Id_Y$ y $gf \simeq Id_X$. Se dice que los espacios X y Y son homotópicamente equivalentes o tienen el mismo tipo de homotopía y se donota como $X \simeq Y$.

4.1.3 Definición. Dos funciones $f_0, f_1 : X \to Y$ son homotópicas relativamente a un subconjunto A de X si y sólo si existe una homotopía $F : X \times [0,1] \to Y$ entre f_0 y f_1 tal que

$$F(x,t) = f_0(x) = f_1(x),$$

para toda $x \in A$ y todo $t \in [0,1]$. Denotamos que f_0 y f_1 son homotópicas relativamente por $f_0 \simeq_{\text{rel A}} f_1$.

4.1.4 Definición. Sean $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow X$ dos caminos en X tales que $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(1) = \beta(1)$. Se dice que son equivalentes si son homotópicos relativamente a $\{0,1\}$. Escribimos, $\alpha \sim \beta$.

Ésto es, los caminos $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow X$ son equivalentes si existe una función continua

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

tal que

$$F(t,0) = \alpha(t),\ F(t,1) = \beta(t) \text{ y}$$

$$F(0,s) = \alpha(0) = \beta(0),\ F(1,s) = \alpha(1) = \beta(1),$$

para todo $t \in [0,1]$ y para todo $s \in [0,1]$.

4.1.5 Definición. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$ fijo, definimos un lazo f como una trayectoria tal que el punto inicial coincide con el punto final, i.e. $f : [0,1] \longrightarrow X$ es continua y $f(0) = f(1) = x_0 \in X$, denotamos por $\Omega(X, xo)$ al conjunto de los lazos cuyo punto inicial o base es x_0.

4.1.6 Proposición. *La relación de homotopía por caminos define una relación de equivalencia en* $\mathcal{L}(x_0), x_0 \in X$.

Demostración.

1. Reflexiva, $f \sim f$ mediante la homotopía $f_t = f$ para todo $t \in [0,1]$.

2. Simétrica, supongamos que $f \sim g$ mediante f_t, entonces $g \sim f$ mediante la homotopía inversa f_{1-t}.

3. Transitiva, supongamos que $f \sim g$ mediante f_t y $g \sim h$ mediante g_t. Definimos
$$h_t = \begin{cases} f_{2t} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g_{2t-1} & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$
así $f \sim h$ mediante h_t, queremos ver que $H(x,t) = h_t(x)$ es continua. Recordemos que una función definida en la unión de dos conjuntos cerrados es continua si es continua al restringirla en cada uno de los conjuntos cerrados y como
$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$
donde F y G son las funciones asociadas de f_t y g_t respectivamente. Ahora H es continua por que F y G coinciden en $t = \frac{1}{2}$.

■

Dadas dos trayectorias $f, g : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(1) = g(0)$ definimos la trayectoria producto $f \cdot g$ mediante

$$f \cdot g = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

4.1.7 Observación. Este producto respeta las clases de homotopías, es decir si $f_0 \sim f_1$ y $g_0 \sim g_1$ entonces $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$.

Demostración. Supongamos que $f_0 \sim f_1$ y $g_0 \sim g_1$ mediante f_t y g_t respectivamente, que $f_0(1) = g_0(0)$ y $f_1(1) = g_1(0)$. Así $f_t \cdot g_t$ define una homotopía $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$.

4.2 Grupo fundamental

4.2.1 Definición. Definimos $\pi_1(X, x_0)$ como el conjunto de las clases de homotopías $[f]$ de lazos con punto base x_0

4.2.2 Proposición. $\pi_1(X, x_0)$ *es un grupo con respecto al producto* $[f][g] = [f \cdot g]$.

Demostración. Tenemos, por consrucción, que la asignación del producto $[f][g] = [f \cdot g]$, es correcta. Además, por la observación anterior, tenemos que está bien definida. Ahora, sean $[f], [g], [h] \in \pi_1(X, x_0)$, tenemos que

$$[f]([g][h]) = [f(gh)],$$

y

$$([f][g])[h] = [(fg)h].$$

Donde, por definición del producto de lazos con punto base x_0,

$$f(gh) = \begin{cases} f(4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ g(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y

$$(fg)h = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(4t-2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ h(4t-3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Consideremos la siguiente homotopía,

$$H(t,s)=\begin{cases} f(\frac{4t}{s+1}) & \text{si } 0\le t\le \frac{s+1}{4},\\ g(4t-s-1) & \text{si } \frac{s+1}{4}\le t\le \frac{s+2}{4},\\ h(1-\frac{4(t-1)}{s-2}) & \text{si } \frac{s+2}{4}\le t\le 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$H(t,0)=\begin{cases} f(4t) & \text{si } 0\le t\le \frac{1}{4},\\ g(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4}\le t\le \frac{1}{2},\\ h(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2}\le t\le 1, \end{cases}$$

$$H(t,1)=\begin{cases} f(2t) & \text{si } 0\le t\le \frac{1}{2},\\ g(4t-2) & \text{si } \frac{1}{2}\le t\le \frac{3}{4},\\ h(4t-3) & \text{si } \frac{3}{4}\le t\le 1, \end{cases}$$

$$H(0,s)=(fg)h(0)=f(gh)(0),$$

$$H(1,s)=(fg)h(1)=f(gh)(1).$$

De ésto, $f(gh)$ y $(fg)h$ son homotópicamente equivalentes, lo que implica que

$$[f(gh)]=[(fg)h],$$

por lo tanto, la operación es asociativa.
El elemento neutro de dicha operación es el lazo

$$\begin{array}{rccc} 1_{\pi_1(X,x_0)}: & [0,1] & \longrightarrow & X\\ & t & \mapsto & x_0 \end{array}$$

Sea $[\tilde{f}]\in\pi_1(X,x_0)$, tenemos que

$$[\tilde{f}]1_{\pi_1(X,x_0)}=\begin{cases} \tilde{f}(2t) & \text{si } 0\le t\le \frac{1}{2},\\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2}\le t\le 1, \end{cases}$$

$$1_{\pi_1(X,x_0)}[\tilde{f}]=\begin{cases} x_0 & \text{si } 0\le t\le \frac{1}{2},\\ \tilde{f}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2}\le t\le 1. \end{cases}$$

Consideremos la homotopía

$$\tilde{H}(t,s)=\begin{cases} \tilde{f}(\frac{2t}{2-s}) & \text{si } 0\le t\le \frac{2-s}{2},\\ x_0 & \text{si } \frac{2-s}{2}\le t\le 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$\tilde{H}(t,0)=\begin{cases} \tilde{f}(t) & \text{si } 0\le t\le 1,\\ x_0 & \text{si } 1\le t\le 1, \end{cases}$$

$$\tilde{H}(t,1)=\begin{cases}\tilde{f}(2t) & \text{si } 0\leq t\leq \frac{1}{2},\\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

Además,

$$\tilde{H}(0,s)=\tilde{f}(0)=(\tilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)})(0),$$

$$\tilde{H}(1,s)=\tilde{f}(1)=(\tilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)})(1).$$

De ésto, $[\tilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)}]=[\tilde{f}]$. Luego, consideremos la homotopía

$$G(t,s)=\begin{cases}x_0 & \text{si } 0\leq t\leq \frac{s}{2},\\ \tilde{f}(\frac{2t}{2-s}) & \text{si } \frac{s}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

Notemos que

$$G(t,0)=\begin{cases}x_0 & \text{si } 0\leq t\leq 0,\\ \tilde{f}(t) & \text{si } 0\leq t\leq 1,\end{cases}$$

$$G(t,1)=\begin{cases}x_0 & \text{si } 0\leq t\leq \frac{1}{2},\\ \tilde{f}(2t) & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

Además,

$$G(0,s)=\tilde{f}(0)=(1_{\pi_1(X,x_0)}\tilde{f})(0),$$

$$G(1,s)=\tilde{f}(1)=(1_{\pi_1(X,x_0)}\tilde{f})(1).$$

De ésto, $[1_{\pi_1(X,x_0)}\tilde{f}]=[\tilde{f}]$. Así,

$$[1_{\pi_1(X,x_0)}\tilde{f}]=[\tilde{f}]=[\tilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)}].$$

Luego, sea $\tilde{g}\in\pi_1(X,x_0)$, definimos su elemento inverso $\tilde{g}$ como $\tilde{g}^{-1}(t)=\tilde{g}(1-t)$. Entonces,

$$\tilde{g}\tilde{g}^{-1}=\begin{cases}\tilde{g}(2t) & \text{si } 0\leq t\leq \frac{1}{2},\\ \tilde{g}(2-2t) & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1,\end{cases}$$

y

$$\tilde{g}^{-1}\tilde{g}=\begin{cases}\tilde{g}(1-2t) & \text{si } 0\leq t\leq \frac{1}{2},\\ \tilde{g}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

Ahora, consideremos la siguiente homotopía

$$F(t,s)=\begin{cases}\tilde{g}(2ts) & \text{si } 0\leq t\leq \frac{1}{2},\\ \tilde{g}(2s(1-t)) & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

Notemos que

$$F(t,0) = \begin{cases} \tilde{g}(0) = x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(0) = x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$F(t,1) = \begin{cases} \tilde{g}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Además,

$$F(0,s) = \tilde{g}\tilde{g}^{-1}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)})(0) = x_0,$$

$$F(1,s) = \tilde{g}\tilde{g}^{-1}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)})(1) = x_0.$$

De ésto, $[\tilde{g}\tilde{g}^{-1}] = [1_{\pi_1(X,x_0)}]$.
Ahora, consideremos la homotopía

$$\tilde{F}(t,s) = \begin{cases} \tilde{g}(s(1-2t)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(s(2t-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$\tilde{F}(t,0) = \begin{cases} \tilde{g}(0) = x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(0) = x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\tilde{F}(t,1) = \begin{cases} \tilde{g}(1-2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Además,

$$F(0,s) = \tilde{g}^{-1}\tilde{g}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)})(0) = x_0,$$

$$F(1,s) = \tilde{g}^{-1}\tilde{g}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)})(1) = x_0.$$

De ésto, $[\tilde{g}^{-1}\tilde{g}] = [1_{\pi_1(X,x_0)}]$. Así,

$$[\tilde{g}^{-1}\tilde{g}] = [1_{\pi_1(X,x_0)}] = [\tilde{g}\tilde{g}^{-1}].$$

Por lo tanto,$\pi_1(X,x_0)$ es un grupo.

$\blacksquare$

5 Obstrucción de finitud de Wall

Ahora presentaremos el teorema de obstrucción de finitud de Wall donde nos serán útiles los conceptos que se han definido a lo largo de nuestro trabajo para entender lo que nos dice el teorema. Para más detalles consulte [Ped17].

5.0.1 Definición. Sea X un espacio topológico conexo, decimos que X es finitamente dominado si existen K complejo CW finito y mapeos $X \xrightarrow{s} K$, $X \xrightarrow{r} K$ tales que $r \circ s \simeq Id_X$.

5.0.2 Teorema. ***(Obstrucción de finitud de Wall)*** *Sea X un espacio topológico finitamente generado, entonces existe un invariante $\sigma(X) \in \tilde{K_0}(\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)])$ tal que X es homotopicamente equivalente a un complejo CW finito si y sólo si $\sigma(X) = 0$.*

References

[Cha05] Fernando Chamizo. *5. Grupo Fundamental*. UAM, 2004-2005.

[Cis01] José Luis Cisneros. Grupo fundamental y espacios cubrientes. *Escuela de Verano en Topología y Geometría*, 2001.

[Han] Soren Hansen. *CW complexes*. `www.math.ksu.edu/~hansen/CWcomplexes.pdf`.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[LP05] Emilio Lluis Puebla. Álgebra homológica, cohomología de grupos y k-teoría algebraica clásica. *Publicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana, Serie: Textos*, 5, 2005.

[Ped17] Erik Kjæ r Pedersen. Wall's finiteness obstruction. *J. Pure Appl. Algebra*, 221(7):1691–1698, 2017.