Superficies de Riemann

Daniel Zambrano

30 de agosto de 2017

Índice

1. Introducción

El concepto de Superficie de Riemann fue definido y estudiado principalmente por Bernhard Riemann, un matemático alemán que hizo importantes contribuciones en análisis, teoría de numeros y para este caso en geometría diferencial.
Dentro del documento se darán definiciones importantes como lo que es una superficie desde el punto de vista topológico de una manera muy vaga, la definición de carta coordenada, que es importante para definir lo que es un atlas y por consiguiente poder dar la definición de superfice de Riemann.
Después de eso hablaremos superficialmente de las clasificaciones de superficies:

- Parabólica,
- Hiperbólica,
- Elíptica,

las cuales se diferencían por la curvatura que toman al asignarles una métrica Riemanniana.
Para terminar se verificarán cuatro teoremas para superficies de Riemann, tres de los cuales son famosos en análisis complejo:

- Teorema de la singularidad evitable,
- Teorema de Orientabilidad,
- Teorema de identidad,
- Teorema de la función abierta,

y se darán sus respectivas demostraciones.
El tema conlleva el uso de de varias areas de la matemática, entre ellas: Geometría diferencial, Análisis complejo, Topología y Álgebra.

2. Definiciónes

Comenzaremos definiendo lo que es una superficie.

Definicón 1. Una superficie es un espacio topológico de Hausdorff M con una base numerable.

Ahora pasaremos a definir lo que es una carta coordenada

Definicón 2. Sea M una superficie. Una carta coordenada de M en $\mathbb{C}$ es un par (U, ϕ) tal que $\phi : U \to \mathbb{C}$ cumple $\phi(U)$ es abierto y ϕ es homeomorfismo.

Con esta definición podemos pasar a definir lo que es un atlas.

Definicón 3. Un atlas de una superficie M es una colección de cartas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ con U_i abierto en S y $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}$ le asigna coordenadas en $\mathbb{C}$ a cada punto de U_i.

La siguiente definición será utilizada más adelante pero es importante tenerla en cuenta:

Definicón 4. Una superficie M es simplemente conexa si y solo si es arco conexa y si para cualesquieras dos caminos $p : [0, 1] \to M$ y $q : [0, 1] \to X$ con el mismo punto inicial y final ($p(0) = q(0)$,$p(1) = q(1)$) se cumple que p y q son homotópicos.

Ahora ya definido lo que es un atlas podemos definir lo que es una superficie de Riemann

Definicón 5. Una superficie M se llama superficie de Riemann si M es diferenciable y tiene un atlas holomorfo, i.e. para todo α, β índices del de las cartas del atlas si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ es holomorfa sobre ese conjunto.

Observación: si (V, ϕ) es una carta de una superficie M entonces para todo $V \subset U$ abierto y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva en $\phi(V)$, $(V, f \circ \phi)$ es también una carta coordenada.

Ejemplo. El ejemplo más basico es $\mathbb{C}$, podemos tomar el atlas con la función $\phi(z) = z$ y $\mathbb{C}$ como el abierto. Aquí es fácil ver que más de un atlas pueden definir una superficie de Riemann por que pudimos haber tomado $\phi(z) = \overline{z}$, lo cual define también un atlas con $\mathbb{C}$. Es natural pensar que cualquier subconjunto abierto no vacío de una superficie de Riemman es una superficie de Rieman. Otro ejemplo es la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con el atlas:

$$\{(\phi_1, \mathbb{C}), (\phi_2, \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})\}.$$

donde:

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= z \\ \phi_2(z) &= \begin{cases} 1/z & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Definicón 6. Sea M una superficie de Riemann y un subconjunto abierto U_∞:

$$U_\infty^{(0)} \cup U_\infty^{(1)} \cup \cdots \cup U_\infty^{(N)} = U_\infty \subset M$$

tal que $M \setminus U_\infty$ es compacto y $U_\infty^{(n)}$ son homeomorfas a discos perforados i.e. existen $z_{(n)}$ tal que:

$$z_{(n)} : U_\infty^{(n)} \to D \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

donde el homeomorfismo $z_{(n)}$ es compatible de manera holomorfa con la estructura compleja de M; entonces la superficie es llamada una superficie de Riemann compacta con perforaciones

Podemos extender el homemorfismo $z_{(n)}$ a D:

$$z_{(n)} : \hat{U}_\infty^{(n)} = U_\infty^{(n)} \cup \infty^{(n)} \to D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

si tomamos una superficie de Riemann compacta M con perforaciones $\{\infty^{(n)}\}$ y definimos de tal manera que $\infty^{(n)}$ cumpla la condición $z_{(n)}(\infty^{(n)}) = 0$ para $n = 1, 2, \cdots, N$ un atlas para la superficie

$$\hat{M} = M \cup \{\infty^{(1)}\} \cup \{\infty^{(2)}\} \cup \cdots \cup \{\infty^{(N)}\} \tag{1}$$

es la unión de todos los atlas $\mathcal{A}$ de M con las cartas coordenadas como los $z_{(n)}$ extendidos a D, los cuales son compatibles con $\mathcal{A}$. A $\hat{M}$ lo llamaremos la compactificación de M.

3. Clasificación

Se pueden dar tres clasificaciones de las superficies de Riemann gracias al teorema de uniformización. Geométricamente esto corresponde a si tienen curvatura positiva negativa o cero.

Con respecto a la geometría conforme cualquier superficie conexa M admite una métrica Riemaniana real completa 2-dimensional, con curvatura constante, -1 (hiperbólica), 0 (parabólica), 1 (elíptica), para superficies de Riemann simplemente conexas el teorema de Uniformizacioón dice que se pueden ver como:

Elíptica
$\hat{\mathbb{C}}$ el único ejemplo para las superficies de curvatura constante igual a 1 que puede ser homeomorfo a la esfera de Riemann es la misma esfera de Riemann
Parabólica
$\mathbb{C}$, para la cual los unicos ejemplos son el mismo plano complejo, el cilindro al hacer $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ y el Toro $\mathbb{T}$ de genero $g = 1$ tomando el latice $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ con $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ y haciendo $\mathbb{T} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$
Hiperbólica
$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ o el semiplano superiór $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$: esta clasificación es la tiene más ejemplos: para empezar tenemos todas las superficies de género $g > 1$; el grupo fundamental de cualquier superficie de Riemann

de clasificación hiperbólica es isomorfo a un grupo fuchsiano y por lo tanto la superficie puede ser modelada por H/Γ donde $\mathbb{H}$ es el semiplano superior con la métrica hiperbólica y γ es un grupo fuchsiano.

Si tomamos $\hat{\mathbb{C}}$ una superficie elíptica y le hacemos una perforación obtenemos $\mathbb{C}$ que es una superficie parabolica; si le hacemos otra perforación obtenemos $\mathbb{C}/c\mathbb{Z}$ con $c \in \mathbb{Z}$ lo cual es un cilindro que sigue siendo parabólica y si le hacemos mas perforaciónes las superficies que van saliendo son hiperbólicas.

4. Teoremas Relevantes

Definicón 7. Una función entre superficies de Riemann diremos que es holomorfa si lo es al componer con cartas.

A continuación veremos unos resultados importantes.

Teorema 1. *Sean U un abierto de M, $a \in U$ y f holomorfa en $U \setminus \{a\}$. Si f está acotada en alguna vecindad de a entonces existe $\tilde{f}$ holomorfa en U con $\tilde{f} = f$ en $U \setminus a$*

Demostración: Tomamos una carta (U, ϕ) y aplicamos el teorema clásico:
Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$,$a \in \Omega$ y f holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$, si f está acotada en $U \setminus \{a\}$ siendo U una vecindad de a entonces $\exists g$ holomorfa en Ω t.q. $g(z) = f(z) \forall z \in \Omega \setminus \{a\}$.
Para $f \circ \phi^{-1}$ existe $g = f \circ \phi^{-1}$ en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ y hacemos $\tilde{f} = g \circ \phi$ la cual es holomorfa e igual a f en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

Teorema 2. *Toda superficie de Riemann es orientable.*

Demostración. Tomemos un par de cartas del atlas con las funciones ϕ_i, ϕ_j y definamos $\phi_{ij} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donde $\phi_{ij}(z) = \phi_i(\phi_j^{-1}(z))$. A continuación, si tomamos $z = (x, y)$ y $\phi_{ij}(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ la cual cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemann y al calcular el jacobiano $Jac(\phi_{ij}) = u_x(x, y)v_y(x, y) - v_x(x, y)u_y(x, y) = u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)$ lo cual siempre es positivo, y como no importa qué cartas tomamos al hacer un cambio de cartas el jacobiano siempre será positivo.
$\therefore$ toda superficie de Riemann es orientable

Teorema 3. *Sean M y N superficies de Riemann, M conexa y $f, g : M \to N$ funciones holomorfas. Si el conjunto de puntos donde f y g coinciden tiene puntos de acumulación entonces f y g coinciden en todo M.*

Demostración: El conjunto $G = \{p \in M : \exists V(p)$ entorno de p tal que $f \equiv g$ en $V(p)\}$ es abierto y cerrado. El teorema de identidad clásico asegura que G no es vacío, luego $G = M$

Teorema 4. *Sean M y N superficies de Riemann y $f : M \to N$ holomorfa y no constante. Entonces f es una función abierta i.e. para todo abierto $U \in M, f(U)$ es abierto en N.*

Demostración Tomamos un abierto $V \in \mathbb{C}$ y una carta (ϕ, U) en M, t.q. $\phi(U) = V$ y una carta (ψ, U') en N. Al componer obtenemos $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : V \to \mathbb{C}$, como f es no constante $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es una función abierta por el teorema clasico de la función abierta, ahora tomemos $V' \subseteq V$ abierto. Al aplicar la función $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(V') = W, W$ es abierto así $\psi^{-1}(W)$ es abierto en N, ahora $\phi^{-1}(V')$ es abierto en M y $f(\phi^{-1}(V')) = \psi^{-1}(W)$
$\therefore f$ es una función abierta

Teorema 5. *sea $f : M \to \mathbb{C}$ holomorfa y no constante entonces $|f|$ no alcanza su máximo.*

Demostración: supongamos que f alcanza su máximo, esto es: existe $a \in M$ de tal manera que $|f(a)| \leq |f(x)| \forall x \in M$ por tal motivo $f(M) \subset \bar{B}(0, |f(a)|)$, por otro lado f es una función abierta así $f(M) \subset B(0, |f(a)|)$ por lo tanto $|f(a)| < |f(a)|$!!!
$\therefore f$ no alcanza su máximo

corolario 1. *Sea M una variedad de Riemann compacta y $f : M \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces f es constante.*

Demostración: Como f es holomorfa $f(M)$ es compacto y por lo tanto f alcanza su maximo en M por el teorema 5 f es constante.

5. Conclusión:

Una manera de trabajar ciertas superficies de manera cómoda es utilizando las superficies de Riemann, aunque estas no engloben muchas de las superficies que se nos pudieran ocurrir podemos trabajar a fondo dentro de estas sólo llevandolas a $\mathbb{C}$ y ahí hacerles lo que se nos antoje. Como es evidente el tema requiere de el dominio de diversas áreas de la matemática y por lo tanto es complicado trabajarlo sin el dominio de las mismas, para un estudiante con mis conocimientos fue muy complicado por que tuve que aprender muchas cosas que no sabía pero seguiré trabajando sobre esta misma línea para poder obtener resultados más avanzados.
Por último me gustaria agradecer al Dr. Alberto Verjovski por la comprensión y paciencia para dejarme trabajar con él, además quiero agradecer a los compañeros que a pesar de tener su propio trabajo me brindaron su apoyo en especial a: Adrian Alberto De Flon Gasca y Sandy Guadalupe Aguilar Rojas, asi mismo al Programa para un Avance Global e Integrado de la Matemática Mexicana, proyecto FORDECyT clave 265667, sin el cual este trabajo no hubiese sido posible.

Referencias

[1] Antonio Alarcón Lopez, *Introducción a las superficies de Riemann*, 2005.

[2] Alberto Verjovsky, *El teorema de Koebe y Poincaré Escuela de veran*, 2016 Random House, N.Y.

[3] _____,*Riemann surface*,https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_surface