

Superficies de Seifert

Marcos Torres Vivanco

17 de agosto de 2017

Agradezco al Programa para un Avance Global e Integrado de la Matemática Mexicana, proyecto FORDECyT clave 265667.

1. Definiciones básicas

En esta sección presentaremos las definiciones y conceptos básicos en la Teoría de nudos necesarios para este trabajo. Se da por hecho que el lector está familiarizado con las definiciones y resultados de un curso básico de topología general. Para mas información con respecto a topología general se puede consultar [1] y para profundizar más en las definiciones y conceptos básicos de la Teoría de nudos se pueden consultar los primeros capítulos de [2] y [3].

Definición 1.1. *Un subconjunto K de \mathbb{R}^3 es un **nudo** si existe un encaje topológico diferenciable $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $f(S^1) = K$.*

En algunas ocasiones pediremos que los nudos sean subconjuntos de S^3 (la compactación por un punto de \mathbb{R}^3), para aprovechar la propiedad de la compacidad de S^3 .

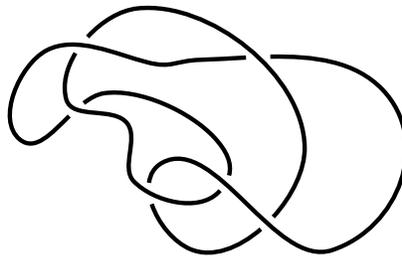


Figura 1: Un nudo

Al igual que en cualquier rama de las matemáticas una vez definido nuestro objeto de trabajo queremos definir una relación de equivalencia que nos diga cuando dos objetos son iguales. Si definimos tal relación de equivalencia de manera que dos nudos sean iguales si

son homeomorfos, entonces todos serían iguales, pues son homeomorfos a S^1 . Queremos que sean iguales si existe una forma de llevar un nudo en otro deformando de manera continua \mathbb{R}^3 . Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 1.2. Sean K_1 y K_2 dos nudos, y sean $f_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sus respectivos encajes, decimos que son **equivalentes** si existe una función continua $h : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

tal que:

- La función $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h_t(x) = h(x, t)$ es un homeomorfismo para todo $t \in [0, 1]$.
- La función h_0 es la identidad en \mathbb{R}^3 .
- Para todo $s \in S^1$, $h_1(f_1(s)) = f_2(s)$.

A este proceso de deformar de manera continua \mathbb{R}^3 para llevar un nudo en otro se le llama **isotopía del ambiente**.

Todo nudo se puede proyectar en un plano. Pediremos una condición extra para los nudos, queremos que exista una proyección donde el conjunto de los puntos múltiples, es decir puntos en la proyección que provienen de más de un punto del nudo, sea un conjunto finito y que todos los puntos múltiples provengan de únicamente dos puntos distintos en el nudo.

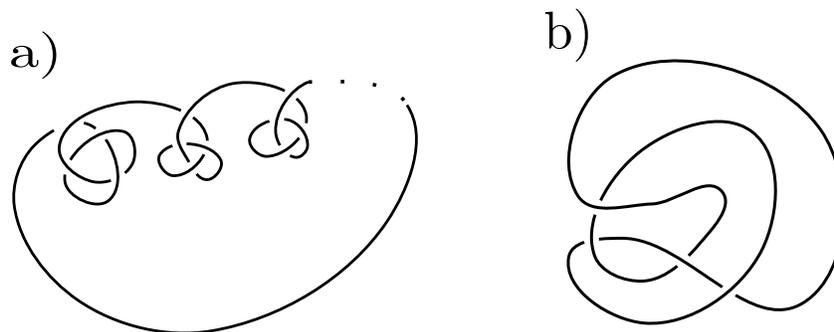


Figura 2: a) Un nudo con infinitos puntos multiples, b) Diagrama de un nudo

A la figura obtenida de esta proyección se le llama **diagrama del nudo**, a los puntos múltiples **cruces del diagrama** y a los arcos entre los cruces **arcos del diagrama**.

Claramente existe más de un diagrama para un mismo nudo, por lo tanto vamos a ver una manera de relacionar diagramas que pertenezcan al mismo nudo.

Definición 1.3. Diremos que dos diagramas de nudos son **equivalentes** si se puede llegar de uno a otro mediante una cantidad finita de las siguientes transformaciones o sus inversos:

1. El movimiento Ω_1 de la figura 3.
2. El movimiento Ω_2 de la figura 3.
3. El movimiento Ω_3 de la figura 3.
4. Una isotopía de los arcos del diagrama.

Los tres primeros movimientos son llamados, **movimientos de Reidemeister**.

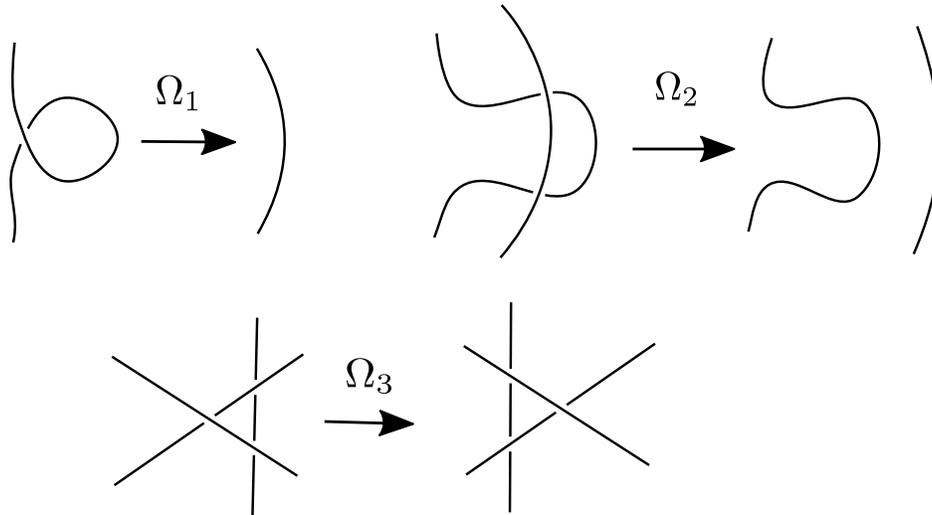


Figura 3: Los tres movimientos de Reidemeister

Las cuatro transformaciones mencionadas en la definición anterior representan isotopías del ambiente en \mathbb{R}^3 reflejadas en el plano por lo tanto podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.1. Sean D_1 y D_2 diagramas de dos nudos K_1 y K_2 respectivamente, entonces D_1 es equivalente a D_2 si y sólo si K_1 es equivalente a K_2 .

De este teorema podemos notar que el problema de la equivalencia de nudos (objetos en \mathbb{R}^3) se reduce a ver la equivalencia de sus diagramas (objetos en \mathbb{R}^2).

El nudo de la figura 4 es conocido como el nudo trébol y se muestra como llegar de un diagrama a otro diferente mediante movimientos de Reidemeister.

2. Superficies

Para definir una superficie, primero debemos definir lo que es una variedad topológica.

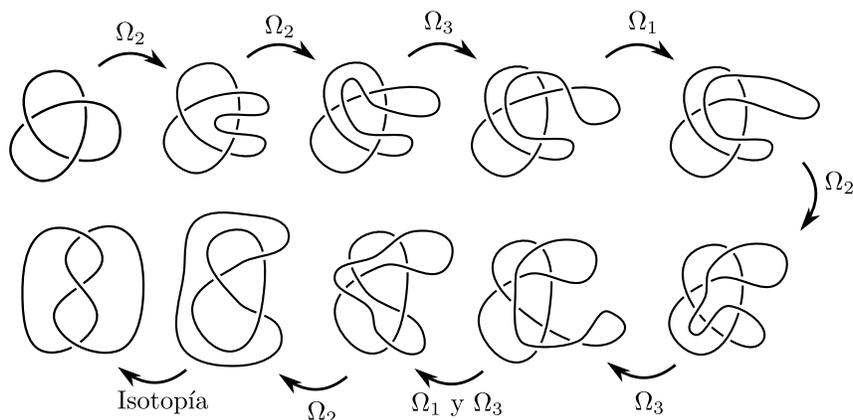


Figura 4: Dos diagramas equivalentes del nudo trébol.

Definición 2.1. *Un espacio topológico M es una n -variedad si cumple las siguientes propiedades:*

- M es un espacio Hausdorff.
- M es segundo numerable.
- Es localmente euclidiano, es decir para todo $x \in M$ existe un abierto $U \subset M$ tal que $x \in U$ y U es homeomorfo a \mathbb{R}^n o bien a \mathbb{R}_+^n , donde \mathbb{R}_+^n denota al hiperespacio superior, es decir el conjunto de puntos $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_n \geq 0$.

El conjunto de los puntos cuya vecindad es homeomorfa a \mathbb{R}_+^n se llama **frontera** de la variedad, se denota ∂M y es una $n - 1$ -variedad sin frontera.

Una **superficie** es una 2-variedad.

A lo largo de este trabajo también pediremos que las variedades tengan una estructura diferenciable, por lo tanto solo trabajaremos con variedades diferenciables. Para más información sobre variedades diferenciables se puede consultar [4].

Como ejemplos de superficies tenemos a la esfera, el plano real y al toro.

Sean F_1 y F_2 dos superficies compactas y conexas, entonces podemos encontrar abiertos U_1 y U_2 en F_1 y F_2 respectivamente, tales que son homeomorfos a una bola abierta. Removemos este abierto de cada una de las superficies y luego identificamos a $F_1 \setminus U_1$ y a $F_2 \setminus U_2$ por la frontera de los abiertos que quitamos. Este nuevo espacio es una superficie y se le llama la **suma conexa** de F_1 y F_2 y se denota $F_1 \sharp F_2$.

Definición 2.2. *Un **complejo simplicial** es un conjunto K formado por vértices, aristas, triángulos y sus generalizaciones en más dimensiones, llamados n -**simplejos**. Tales que:*

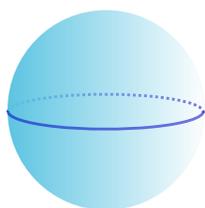


Figura 5: Una esfera es una superficie

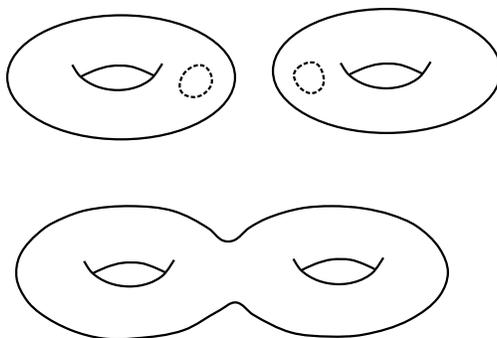


Figura 6: Suma conexa de dos toros.

1. Si un simplejo σ pertenece a K entonces también los simplejos que conforman a σ pertenecen a K .
2. Si dos simplejos σ_1, σ_2 pertenecen a K entonces su intersección es el conjunto vacío o es otro simplejo σ_3 .

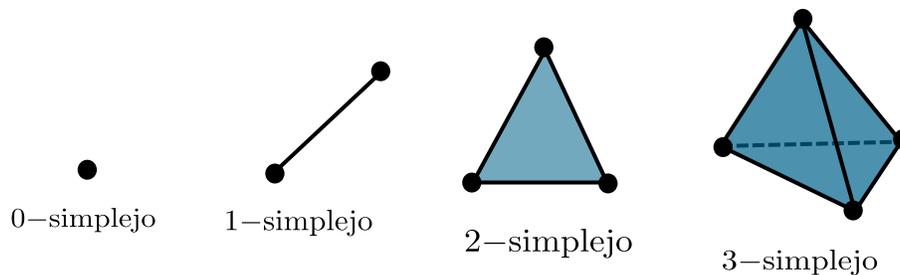


Figura 7: Los complejos simpliciales están compuestos por simplejos.

El siguiente resultado de Rado, nos será muy útil para poder trabajar con superficies viendolas como complejos simpliciales.

Proposición 2.1. *Toda superficie S es triangulable, es decir existe una partición $S =$*

$\bigcup_i T_i$, donde cada T_i es un 2-simplejo o triángulo, tal que dos triángulos se intersecan en a lo más una arista.

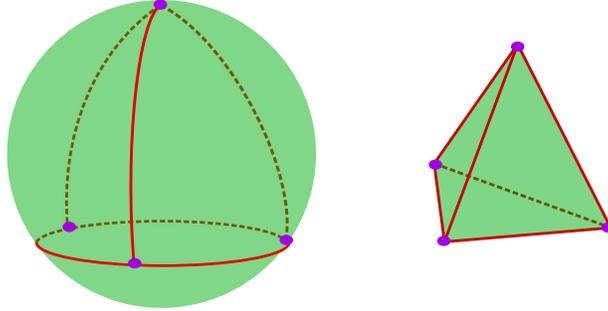


Figura 8: Una triangulación de la esfera equivalente a un tetraedro.

Con este resultado es posible demostrar el siguiente teorema, el cual nos resultará extremadamente útil en el futuro.

Teorema 2.1. Teorema de clasificación de superficies *Toda superficie cerrada (compacta, conexa y sin frontera) es homeomorfa a algún miembro de las siguientes familias de superficies:*

1. La esfera;
2. Suma conexa de g toros, donde $g \geq 1$;
3. Suma conexa de k planos proyectivos reales, donde $k \geq 1$.

De estas tres familias, sólo las dos primeras son orientables. A la superficie obtenida por la suma conexa de g toros se le conoce como **la superficie de género g** , es decir es la superficie orientable con g agujeros. En este sentido podemos considerar a la esfera como la superficie orientable con cero agujeros, es decir de género 0. Si M es una superficie cerrada y orientable, denotaremos por $g(M)$ a su género.

De esta manera podemos clasificar a todas las superficies orientables y que además tienen fronteras, para esto sólo tenemos que indicar la cantidad de fronteras que tiene la superficie. A la superficie de género g y b fronteras la denotaremos por $S_{g,b}$.

Recordemos el siguiente invariante topológico el cual está definido para superficies y en general para cualquier conjunto que se pueda describir como un complejo simplicial; la característica de Euler.

Definición 2.3. *Sea C un complejo simplicial, y sean c_i la cantidad de i -simplejos que lo conforman, entonces la **característica de Euler** de C está definida como:*

$$\chi(C) := \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i$$

En el caso particular de las gráficas, las cuales pueden ser vistas como complejos simpliciales formados por 0- y 1-simplejos, tenemos que $\chi(G) = v - a$, donde v es la cantidad de vértices de G y a la cantidad de aristas.

Triangulando la superficie de género g con b fronteras, $S_{g,b}$, podemos notar que tiene característica de Euler

$$\chi(S_{g,b}) = 2 - 2g - b \tag{1}$$

Por lo tanto puede haber superficies con diferente género y diferente cantidad de fronteras con la misma característica de Euler, por ejemplo $\chi(S_{0,3}) = 2 - 2 \cdot 0 - 3 = -1 = 2 - 2 \cdot 1 - 1 = \chi(S_{1,1})$.

Ahora definiremos una clase de superficies especiales que tienen relación con nudos.

Definición 2.4. *Sea K un nudo. Una superficie compacta, conexa, orientable cuya frontera es el nudo K se llama **superficie de Seifert** del nudo K .*

Con esta definición cualquiera se preguntaría si para cualquier nudo existe una superficie de Seifert, la respuesta es que si. El teorema 2.2 fue originalmente formulado y demostrado por L. Pontrjagin y F. Frankl, pero la prueba dada por Seifert nos será de mayor utilidad, pues nos proporciona un algoritmo para encontrar una superficie de Seifert para cualquier nudo usando alguno de sus diagramas.

Teorema 2.2. *Sea un nudo orientado arbitrario K , entonces existe en \mathbb{R}^3 una superficie compacta, conexa y orientable, F , cuya frontera es K .*

Demostración. Sea K un nudo orientado y D un diagrama para K . Ahora fijémonos en los cruces del diagrama D . Dibujamos una circunferencia que contenga al cruce y que corte a D en únicamente cuatro puntos. Dichos puntos están unidos por dos segmentos, lo que haremos es cambiar estos segmentos de tal manera que se conserve la orientación que sigue el nudo, como en la figura 9.

Después de realizar este procedimiento con cada uno de los cruces, ya no tendremos ninguna intersección por lo que tendremos una familia Σ de curvas cerradas orientadas, como en la figura 10. Estas curvas son llamadas curvas de Seifert.

Por el teorema de la curva de Jordan cada una de estas curvas divide al plano en dos regiones, una de las cuales es homeomorfa a un disco con frontera la curva. Por lo tanto, dado que tenemos una cantidad finita de estas curvas podemos encontrar una curva de más adentro, es decir una curva σ_1 que es frontera de un disco D_1 , cuyo interior no contiene ninguna otra curva de Seifert.

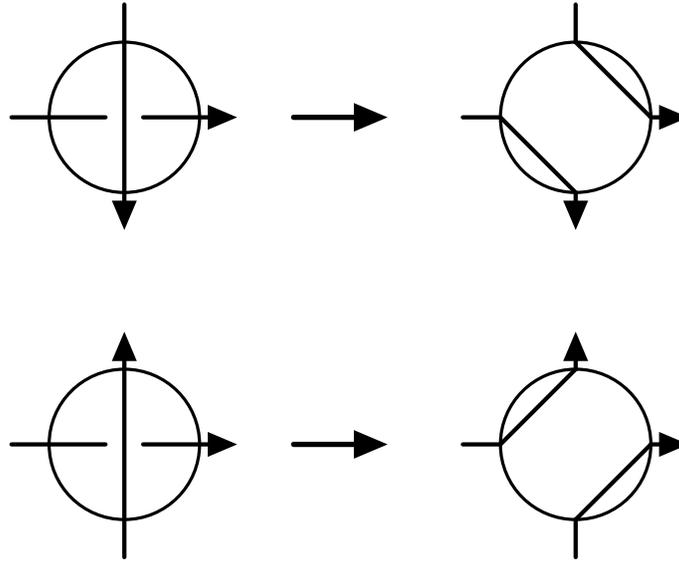


Figura 9: Cambio realizado en los cruces

Tomamos el conjunto formado por el interior de σ_1 y la encajamos en \mathbb{R}^3 paralela al plano xy . Ahora en el conjunto de curvas $\Sigma \setminus \{\sigma_1\}$ existe otra curva de más adentro a la cual llamaremos σ_2 y ,de la misma manera que a σ_1 , la encajamos en \mathbb{R}^3 paralela al plano xy y a una altura distinta que σ_1 . Repetimos este procedimiento de manera inductiva hasta que terminemos con todas las curvas de Σ .

Los discos formados por el interior de las curvas de Seifert son llamados los discos de Seifert. Tenemos a los discos de Seifert encajados en el espacio \mathbb{R}^3 en distintas alturas, ahora sólo falta unirlos. Para hacer esto, en todos los lugares en los que quitamos los cruces del diagrama vamos a pegar una banda cruzada, dependiendo de cómo era el cruce, en la frontera de la superficie, como en la figura 11.

Ahora tenemos una superficie compacta, conexa y cuya frontera es el nudo K , igual a la de la figura 12. Para verificar que es orientable, les daremos a todos los discos de Seifert la misma orientación de tal manera que se respete la regla de la mano derecha, y notemos que las bandas respetan la orientación.

Es fácil ver que la superficie obtenida es una superficie de Seifert para el nudo K . \square

El proceso usado para obtener una superficie de Seifert de un nudo K a partir de un diagrama D , se le llama **algoritmo de Seifert**.

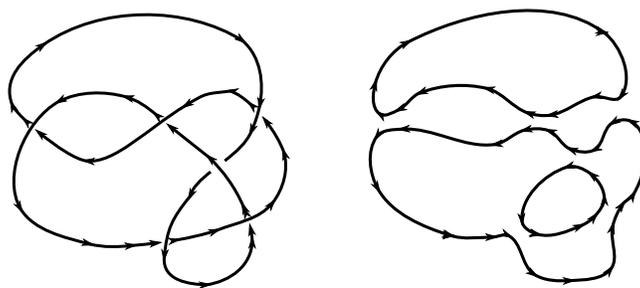


Figura 10: Curvas de Seifert

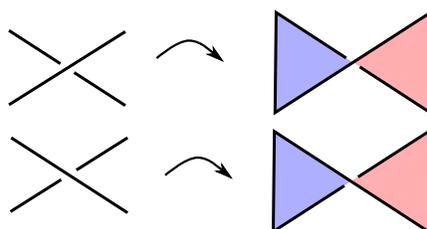


Figura 11: Bandas usadas para unir los discos de Seifert

A toda superficie de Seifert obtenida con el algoritmo de Seifert se le puede asignar una gráfica, donde cada vértice corresponde a un disco de Seifert y dos vértices están unidos con una arista si existe una banda cruzada que una los respectivos discos de Seifert.

Dicho gráfica es llamada la **gráfica de Seifert** de K asociada a la superficie F y se le denota $\Gamma(F)$.

La gráfica de Seifert $\Gamma(F)$ es equivalente homotópicamente a la superficie de Seifert F , es decir existe una forma de deformar F de manera continua hasta que se convierta en $\Gamma(F)$.

La característica de Euler es un invariante para dos conjuntos con el mismo tipo homotópico, por lo tanto si la superficie de Seifert F tiene $d(F)$ discos de Seifert y $b(F)$ bandas, entonces $\chi(F) = \chi(\Gamma(F)) = d(F) - b(F)$.

Para ver los resultados y definiciones relacionados a equivalencia homotópica y a como la característica de Euler es invariante bajo esta se puede consultar [5].

3. El género de un nudo

Notemos que si F es una superficie de Seifert para un nudo K , por ser orientable, compacta y conexa es posible calcular su género y como su frontera es el nudo K entonces solo tiene una frontera, por lo tanto por la ecuación (1) que obtuvimos anteriormente tenemos:

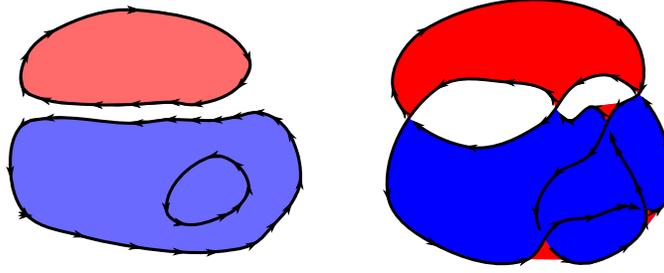


Figura 12: Superficie de Seifert

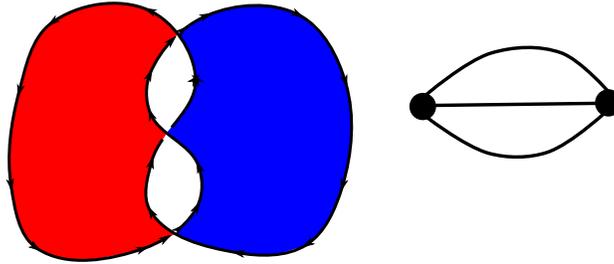


Figura 13: Gráfica de Seifert

$$\chi(F) = 2 - 2g(F) - 1$$

$$\chi(F) = 1 - 2g(F)$$

Sabemos que $\chi(F) = d(F) - b(F)$ sustituyendo este resultado en la ecuación que obtuvimos del género tenemos:

$$2g(F) = 1 - d(F) + b(F)$$

Notemos que para cualquier diagrama de un nudo K podemos obtener una superficie de Seifert para K , pero si tenemos dos diagramas equivalentes del mismo nudo, no necesariamente van a tener el mismo género.

Dado que el género de una superficie es un número natural, y por el algoritmo de Seifert tenemos que todo nudo tiene al menos una superficie de Seifert entonces por el principio de buen orden existe una superficie de Seifert con género mínimo.

Esto nos lleva a la siguiente definición

Definición 3.1. *El género de un nudo K , denotado $g(K)$, es el menor género de todas las superficies de Seifert para dicho nudo. Es decir*

$$g(K) = \min\{g(F) : F \text{ superficie de Seifert para } K\}$$

*Una superficie de Seifert de género $g(K)$ se llama **superficie de género mínimo**.*

El siguiente teorema nos resultará muy útil, su prueba se puede encontrar en [6] capítulo 2 teorema 7.

Teorema 3.1. *Sea K un nudo, entonces K es equivalente al nudo trivial si y sólo si K es frontera de un disco.*

Dado que el disco tiene género cero por ser homeomorfo a la esfera con una frontera, tenemos el siguiente corolario del teorema 3.1.

Corolario 3.1. *Sea K un nudo, K es equivalente al nudo trivial si y sólo si el género de K es cero.*

A continuación mencionaremos las definiciones de descomposición y suma conexa de nudos, para más información se puede consultar [2].

Sea K un nudo y sea S una esfera de dimensión dos que interseca al nudo en únicamente dos puntos. A través de la superficie de la esfera unimos los dos puntos, de esta manera obtenemos dos nuevos nudos, si ambos nudos son diferentes del nudo trivial diremos que ambos nudos forman una **descomposición** del nudo K .

Definición 3.2. *Si un nudo K no puede ser descompuesto en dos nudos, entonces diremos que K es un nudo **primo**.*

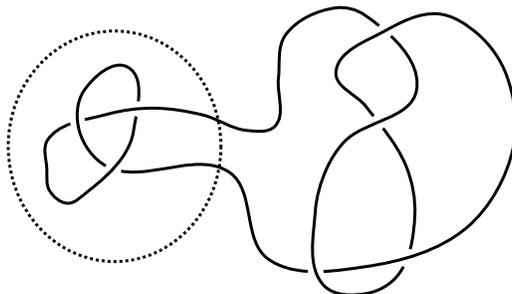


Figura 14: Descomposición de un nudo en un nudo trébol y un nudo ocho

El nudo trébol es el ejemplo más simple de un nudo primo.

Para poder definir la suma conexa primero recordemos que si a la esfera de dimensión n le removemos un subespacio homeomorfo a la esfera de dimensión $n - 1$ obtenemos dos discos de dimensión n .

Sean J y K dos nudos orientados en posición general en el mismo espacio tridimensional S^3 , es decir existen dos bolas ajenas B_1 y B_2 de dimensión 3 tales que $J \subset \text{int}(B_1)$ y $K \subset \text{int}(B_2)$.

Ahora sea Z_1 una esfera de dimensión 2 con centro en un punto del nudo J tal que:

1. La intersección de Z_1 con el nudo K sean solo dos puntos,

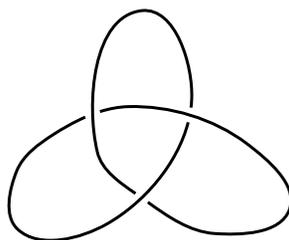


Figura 15: Nudo trébol

2. La esfera Z_1 divide a S^3 en dos bolas de dimensión tres, en el interior de una de estas bolas hay un pedazo de nudo trivial. Es decir si unimos los dos puntos de intersección de Z_1 con K a través de una geodésica en la esfera Z_1 y consideramos el nudo formado por esta geodésica y el pedazo del nudo obtenemos un nudo trivial.

Sea J' la parte del nudo que no es trivial.

De manera análoga para K , sea Z_2 otra esfera de dimensión 2 con centro en un punto de K que cumpla las mismas propiedades que mencionamos arriba y sea K' la parte del nudo que no es trivial. Unimos a J' y a K' con dos trayectorias dirigidas, tales que se respete la orientación de los nudos.

A este nuevo nudo se le llama la **suma conexa** de K y J y se denota $K \# J$.

Notemos que si un nudo K es la suma conexa de dos nudos J y L , es decir $K = J \# L$, entonces dicho nudo se puede descomponer en los nudos J y L , por lo tanto el nudo de la figura 14 es la suma conexa de un nudo trébol y un nudo ocho.

La suma conexa de nudos nos da una idea de como unir nudos y esto nos lleva a pensar en dos cuestiones:

1. Dado un invariante numérico de nudos f , ¿Cuál es la relación entre $f(J \# K)$, $f(K)$ y $f(J)$?. De hecho algo muy deseable es $f(J \# K) = f(J) + f(K)$. Esto en general no va a pasar, pero sí en el caso del género.
2. Dado un nudo no trivial K , ¿Existirá un nudo K' tal que $K \# K'$ sea el nudo trivial?, esto es equivalente a buscar un inverso para la suma conexa. La respuesta a esta pregunta nos la da también el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Sea J y K dos nudos, entonces $g(J \# K) = g(J) + g(K)$*

Demostración. Primero veamos que $g(J \# K) \leq g(J) + g(K)$.

Sea Q una superficie de Seifert para J de género mínimo, es decir $g(Q) = g(J)$ y R una superficie de Seifert para K de género mínimo, $g(R) = g(K)$. Podemos unir ambas superficies por la frontera, con una banda como se muestra en la figura 16. Llamemos P a esta nueva superficie.

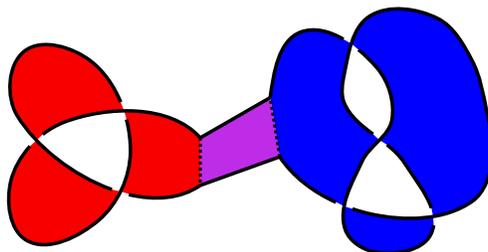


Figura 16: Las dos superficies Q y R unidas por la frontera forman la superficie P

Si tuvieramos una triangulación de las superficies esto equivaldría a pegar un rectángulo por dos aristas, una en la frontera de cada una de las superficies Q y R . La superficie P tiene característica de Euler $\chi(P) = \chi(Q) + \chi(R) - 2 + 1 = \chi(Q) + \chi(R) - 1$ pues solo se agregan a la suma dos aristas y una cara.

Sabemos por la fórmula que encontramos del género que:

$$\begin{aligned} 2g(P) &= 1 - \chi(P) \\ 2g(P) &= 1 - (\chi(Q) + \chi(R) - 1) \\ 2g(P) &= 1 - \chi(Q) + 1 - \chi(R) \\ 2g(P) &= 2g(Q) + 2g(R) \\ g(P) &= g(Q) + g(R) \end{aligned}$$

Ahora notemos que por como lo definimos, P es una superficie de Seifert para $J\sharp K$ y dado que el género de un nudo es el menor género de todas las superficies de Seifert entonces:

$$g(J\sharp K) \leq g(P) = g(Q) + g(R) = g(J) + g(K)$$

Ahora veamos que $g(J) + g(K) \leq g(J\sharp K)$.

Sea S una superficie de Seifert de género mínimo para $J\sharp K$. Dado que podemos descomponer a $J\sharp K$, existe una esfera F , que separa al nudo en dos componentes J y K y que interseca al nudo en únicamente dos puntos. Dicha esfera puede tener múltiples intersecciones con S .

Dado que S es una variedad suave las únicas intersecciones que tiene con F son una cantidad finita de curvas cerradas, segmentos de recta y puntos de tangencia, si las curvas o el segmento se intersecaran entre ellos la superficie S ya no sería variedad, y si hubiera una infinidad de ellos ya no sería una variedad suave. Todos los puntos de tangencia los podemos remover con ligeras isotopías que modifiquen a S .

Además en el conjunto de las intersecciones sólo puede haber un segmento de recta, pues los extremos de los segmentos pertenecen a la frontera y la frontera de S es el nudo,

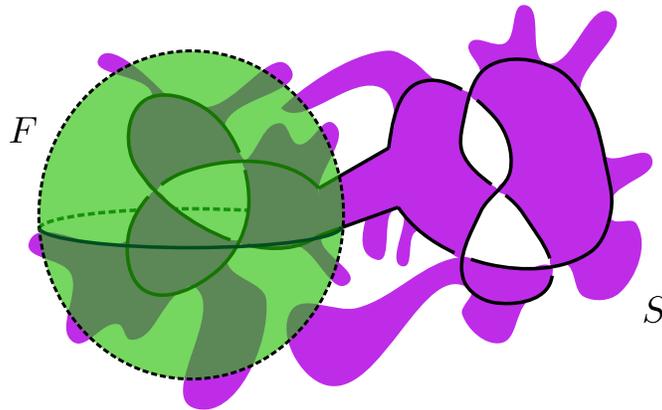


Figura 17: La esfera F interseca al nudo en dos puntos pero a la superficie S en varios lugares.

pero F sólo interseca al nudo en dos puntos. Por lo tanto las intersecciones de F con S sólo son un segmento de recta y una familia de curvas cerradas. Todas las curvas dividen a la esfera en dos discos, uno de los cuales contiene al segmento, consideraremos el interior de la curva como aquel disco que no contiene al segmento.

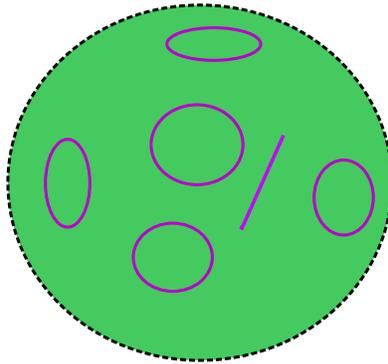


Figura 18: Las intersecciones de F con S son curvas y un segmento.

Bajo esta definición de interior de las curvas, podemos encontrar una curva de más adentro, llamémosla α_1 . Quitamos esta curva α_1 junto con su interior de la esfera F y obtenemos otra superficie S_1 la cual podemos deformar ligeramente para que al volver a agregar tres copias de α_1 y su interior, una en la parte de S_1 que se queda dentro de F , otra en F y la última en la parte de S_1 que se queda por fuera, la nueva superficie S_1 ya no tenga intersección con F en α_1 . Si S_1 es disconexa nos quedaremos únicamente con la componente que contiene al nudo.

Repetimos este proceso hasta quitar todas las curvas $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ que forman el conjunto

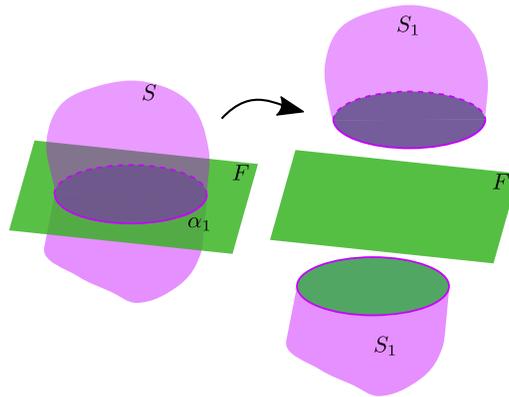


Figura 19: Eliminando la curva α_1 .

de intersecciones de S y F . Dicho proceso no disminuye el género, pues S_i es una superficie de Seifert para $J\sharp K$, para todo i pero el género de S ya era el mínimo. Por lo tanto al final obtendremos una superficie de Seifert S_n de género $g(S_n) = g(S) = g(J\sharp K)$ tal que se interseca con F en un segmento.

Al terminar con este procedimiento, al tomar una triangulación de S_n obtenemos dos superficies de Seifert, Q y R para los nudos J y K respectivamente, tales que comparten únicamente una arista.

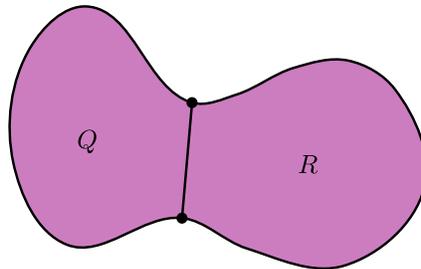


Figura 20: Dividimos a S en dos superficies Q y R unidas por una arista.

Si calculamos la característica de Euler de S_n a partir de las de Q y R , tomando en cuenta que comparten una arista y dos vértices tenemos $\chi(S_n) = \chi(Q) + \chi(R) - 2 + 1 = \chi(Q) + \chi(R) - 1$, y por la fórmula del género tenemos:

$$\begin{aligned}
2g(S_n) &= 1 - \chi(S_n) \\
2g(S_n) &= 1 - (\chi(Q) + \chi(R) - 1) \\
2g(S_n) &= 1 - \chi(Q) + 1 - \chi(R) \\
2g(S_n) &= 2g(Q) + 2g(R) \\
g(S_n) &= g(Q) + g(R)
\end{aligned}$$

Por lo tanto dado que el género de un nudo es el mínimo de todas las superficies de Seifert y dado que Q y R son superficies de Seifert para J y K , y como $g(S_n) = g(S) = g(J\sharp K)$ entonces:

$$g(J\sharp K) = g(S_n) = g(Q) + g(R) \geq g(J) + g(K)$$

Por lo tanto $g(J\sharp K) = g(J) + g(K)$ □

Con este teorema podemos ver como corolario que no hay inverso para la suma conexa, para lo cual únicamente necesitamos recordar que el único nudo de género cero es el trivial.

Corolario 3.2. *Si J no es trivial entonces para todo nudo K el nudo $J\sharp K$ no es el nudo trivial.*

Demostración. Si J no es trivial entonces $g(J) \geq 1$, entonces $g(J\sharp K) = g(J) + g(K) \geq 1$, por lo tanto $J\sharp K$ no es trivial. □

El género también nos ayuda a encontrar algunos nudos primos.

Proposición 3.1. *Si K es un nudo con género 1 entonces K es primo.*

Demostración. Supongamos que K tiene género 1 pero que no es primo, entonces existen dos nudos no triviales J y L tales que $J\sharp L = K$. Como J y L no son triviales $g(J) \geq 1$ y $g(L) \geq 1$, por lo tanto $1 = g(K) = g(J\sharp L) = g(J) + g(L) \geq 2$, lo cual es una contradicción. □

4. Matriz de Seifert

En esta sección haremos uso de la superficie de Seifert para calcular otros invariantes de los nudos, para eso primero necesitamos ver una forma de relacionar dos nudos en un mismo espacio.

Definición 4.1. *Decimos que un subconjunto L de \mathbb{R}^3 es un **enlace** si es una colección finita de nudos que no se intersecan. A los nudos que forman un enlace se les llama componentes del enlace.*

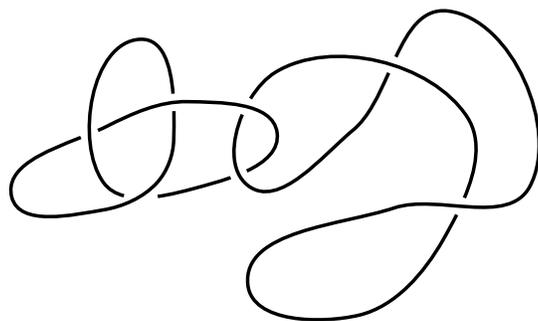


Figura 21: Un enlace de dos componentes.

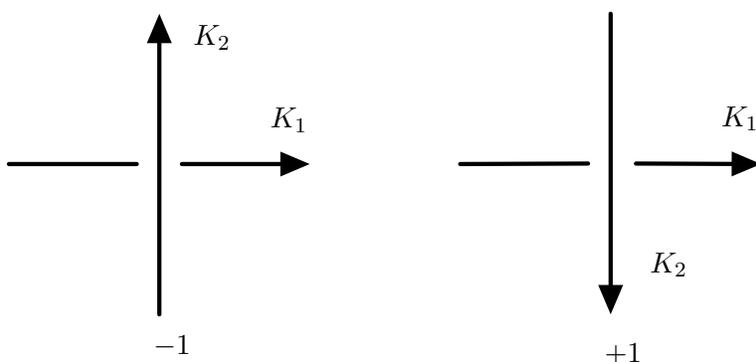


Figura 22: Los dos tipos de cruces y sus valores.

Ahora, supongamos que tenemos un enlace de dos componentes $L = K_1 \sqcup K_2$ donde ambos nudos que lo conforman tienen una orientación. Tomemos un diagrama de dicho enlace y escogemos un punto de K_1 y comenzamos a recorrerlo con la dirección de la orientación del nudo, entonces a cada uno de los cruces en donde K_1 pase por debajo de K_2 le asignamos un valor de ± 1 de acuerdo con la figura 22.

Al sumar estos valores obtendremos un número entero. Dicho valor es el **número de enlace** de los nudos K_1 y K_2 , y se denota $lk(K_1, K_2)$.

Por ejemplo en la figura 23, el nudo K_1 pasa por debajo del nudo K_2 tres veces en cruces del tipo $+1$, por lo que su número de enlace es $lk(K_1, K_2) = 3$.

Recordemos que dado un nudo K y un diagrama D de K , podemos encontrar la superficie de Seifert F con d discos y b bandas. También tenemos su gráfica de Seifert $\Gamma(F)$. Se puede ver que dicha gráfica es plana, por lo que puede ser encajada en la esfera.

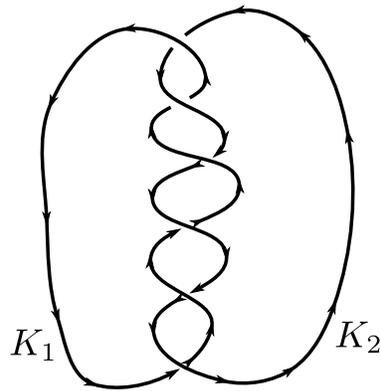


Figura 23: Un enlace con número de enlace 3.

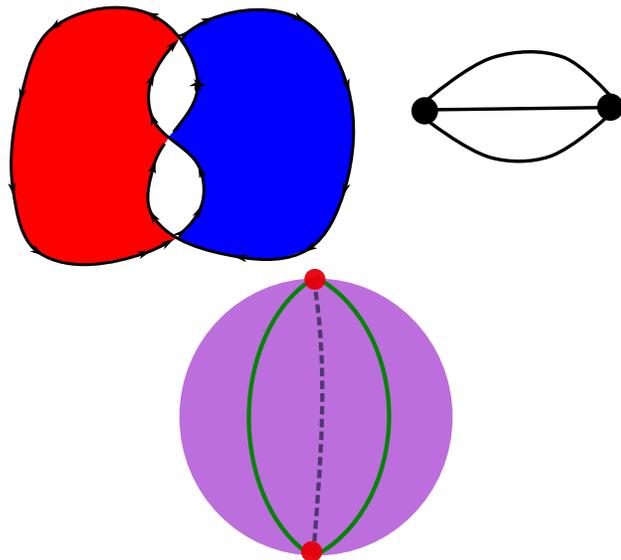


Figura 24: Gráfica de Seifert del nudo trébol en la esfera.

Esta gráfica induce de manera natural un complejo simplicial de la esfera con f caras, b aristas y d vértices. Dado que la característica de Euler de la esfera es 2 tenemos

$$\begin{aligned} 2 &= f - b + d \\ f - 1 &= 1 - d + b \end{aligned}$$

Si vemos la gráfica $\Gamma(F)$ en el plano nuevamente tenemos que tiene $f - 1$ caras acotadas y una cara exterior, sólo consideraremos las caras acotadas. Si recordamos la fórmula del género de una superficie de Seifert tenemos $2g(F) = 1 - d + b = f - 1$, por lo tanto esta cantidad de caras siempre será par. Cada una de estas caras f_i tiene como frontera una curva α_i , la cual puede ser encajada en la superficie de Seifert de tal manera que recorra la misma dirección que recorre en la gráfica de Seifert.

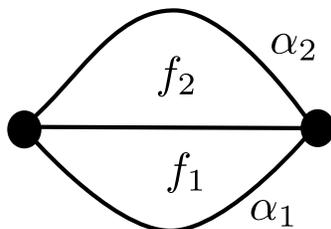


Figura 25: Fronteras de las caras de $\Gamma(F)$.

Queremos ver el número de enlace entre parejas de estas curvas, pero notemos que dos curvas α_i y α_j pueden tener aristas en común por lo que necesitamos arreglar este problema, para esto necesitamos una definición.

Definición 4.2. Un subconjunto $X \subset Y$ es **bicollable** en Y si existe un encaje $b : X \times [-1, 1] \rightarrow Y$ tal que $b(x, 0) = x$ para todo $x \in X$. A la función b o a su imagen se les dice **bicollar**.

Al conjunto $b(X \times [-1, 0))$ se le llama la **parte negativa** del bicollar y al conjunto $b(X \times (0, 1])$ se le llama la **parte positiva** del bicollar.

En particular las superficies de Seifert son bicollables en \mathbb{R}^3 (ó S^3), pues son suaves y orientadas. La idea de bicollar en la superficies de Seifert nos da una idea intuitiva de que estamos ensanchando la superficie. Por lo tanto si tenemos una curva α_i en la superficie de Seifert F , entonces podemos tomar dos curvas paralelas a α_i una en la superficie $F \times \{1\}$ y otra en $F \times \{-1\}$. Seguiremos llamando α_i a la curva que pertenece a la parte negativa del bicollar y α_i^* a la curva que pertenece a la parte positiva del bicollar.

De esta manera, dado que el bicollar es un encaje y no se interseca la parte positiva con la negativa, ninguna curva α_i se interseca con ninguna curva α_j^* para cualquier i y j . Esto nos lleva a la siguiente definición para matriz de Seifert.

Definición 4.3. Sea K un nudo y D un diagrama para K , con superficie de Seifert F . Sean las curvas α_k y α_k^* como las definimos arriba con una orientación arbitraria, entonces la matriz $M = [lk(\alpha_i, \alpha_j^*)]_{i,j=1,\dots,n}$ es llamada la **matriz de Seifert** del nudo K a partir del diagrama D .

Lo primero de lo que nos damos cuenta con esta definición es que la matriz de Seifert no es única para un nudo K , pues podemos tomar otro diagrama, numerar en otro orden las curvas α_k o incluso darles otra orientación. A continuación presentaremos una relación para definir cuando dos matrices de Seifert son equivalentes, de manera que dos matrices sean equivalentes si vienen del mismo nudo.

Teorema 4.1. *Dos matrices de Seifert, obtenidas de dos diagramas de nudos equivalentes, pueden ser cambiadas una a la otra aplicando un número finito de veces, las siguientes dos operaciones, Λ_1 y Λ_2 , y sus inversos:*

$$\Lambda_1 : M_1 \mapsto PM_1P^T,$$

donde P es una matriz entera invertible con $\det P = \pm 1$ y P^T denota a la matriz transpuesta de P .

$$\Lambda_2 : M_1 \mapsto M_2 = \begin{pmatrix} & * & 0 \\ & M_1 & \vdots \\ & & * & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} & & 0 & 0 \\ & M_1 & \vdots \\ & & 0 & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde el símbolo $*$ en las entradas de la matriz M_2 denotan a un entero arbitrario.

Si una matriz puede ser transformada en otra con una cantidad finita de transformaciones de tipo Λ_1 y Λ_2 entonces decimos que las matrices son **S-equivalentes**.

Algunas de las transformaciones de tipo Λ_1 son, por el ejemplo, cambiar filas y columnas, o multiplicar una columna y una fila por -1 . Por lo tanto estas transformaciones nos ayudarán a transformar una matriz de Seifert a otra donde las curvas usadas para calcularla sean nombradas en un orden distinto o con una orientación diferente.

Las transformaciones de tipo Λ_2 nos ayudarán a verificar que si dos diagramas son equivalentes bajo movimientos de Reidemeister entonces sus matrices de Seifert son S-equivalentes.

La prueba completa del teorema 4.1 es muy extensa y se desarrolla en el capítulo 5 de [2].

Calculemos la matriz del nudo trébol como ejemplo.

Tomemos el diagrama de la figura 24, el cual vimos que es equivalente al trébol en la figura 4. Viendo su superficie de Seifert y su respectiva gráfica de Seifert, notamos que tiene dos caras, por lo tanto la matriz será de 2×2 .

Las cuatro parejas de curvas con las que se forman la matriz de Seifert se muestran en la figura 26.

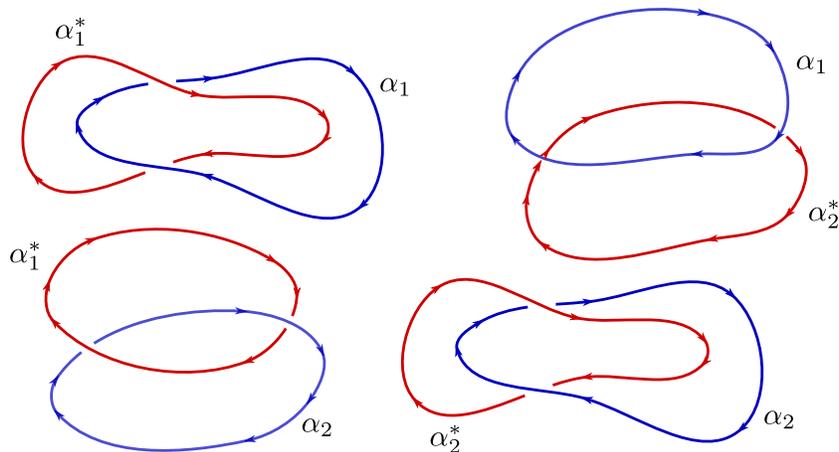


Figura 26: Curvas usadas para calcular la matriz de Seifert del trébol.

Por lo tanto la matriz de Seifert del trébol es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de Seifert resulta interesante pues con ayuda de ella podemos definir dos nuevos invariantes: el determinante y la signatura de un nudo.

Si tomamos dos diagramas diferentes el determinante de sus respectivas matrices de Seifert no necesariamente es el mismo, por lo tanto tenemos que recurrir a la suma de la matriz con su transpuesta para definir el determinante de un nudo.

Teorema 4.2. Si K es un nudo y M es una matriz de Seifert para K , entonces el número $|\det(M + M^T)|$ es invariante bajo transformaciones de tipo Λ_1 y Λ_2 .

Demostración. Primero veamos que es invariante bajo transformaciones de tipo Λ_1 .

$$\begin{aligned}
|\det(PMP^T + (PMP^T)^T)| &= |\det(PMP^T + (PM^T P^T))| \\
&= |\det(P(M + M^T)P^T)| \\
&= |\det(P)||\det(M + M^T)||\det(P^T)| \\
&= |\det(M + M^T)|
\end{aligned}$$

Ahora veamos que es invariante bajo transformaciones de tipo Λ_2 , para eso notemos que no importa cual de las opciones que tenemos para M_2 elijamos siempre vamos a tener:

$$M_2 + M_2^T = \begin{pmatrix} & & * & 0 \\ & M + M^T & \vdots & \vdots \\ & & * & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto calculando el determinante de $M_2 + M_2^T$ a través del último renglón tenemos:

$$\begin{aligned}
&\det(M_2 + M_2^T) = \\
&\pm \det \begin{pmatrix} & & 0 \\ & M + M^T & \vdots \\ & & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y si ahora lo calculamos a través de la última columna tenemos:

$$\begin{aligned}
|\det(M_2 + M_2^T)| &= |\pm \det(M + M^T)| \\
&= |\det(M + M^T)|
\end{aligned}$$

□

Con ayuda de este teorema podemos definir el siguiente invariante de nudos.

Definición 4.4. Sea K un nudo y sea M una matriz de Seifert para K , entonces definimos el **determinante** de K como $|\det(M + M^T)|$ y lo denotamos $\det(K)$.

Con el determinante de un nudo es posible calcular el polinomio de Alexander, un polinomio bastante útil para el estudio de las propiedades de los nudos.

Para definir el siguiente invariante de nudos necesitamos recordar dos teoremas de álgebra lineal y una definición.

Teorema 4.3. *(Teorema espectral) Cualquier matriz simétrica S sobre un campo F , en el que $1 + 1 \neq 0$, es congruente sobre F a una matriz diagonal. Es decir existe una matriz invertible P con entradas en F tal que PSP^T es diagonal.*

Teorema 4.4. *(Teorema de Sylvester) Dos matrices diagonales sobre los reales son congruentes (sobre \mathbb{R}) si y sólo si tienen el mismo número de entradas positivas, negativas y ceros en la diagonal.*

Definición 4.5. *Sea M una matriz con entradas en los reales, la **signatura** de M es la cantidad de valores propios positivos de M menos la cantidad de valores propios negativos y se denota $\sigma(K)$*

Teorema 4.5. *Sea K un nudo y M una matriz de Seifert para K , entonces la signatura de $M + M^T$ es invariante bajo transformaciones de tipo Λ_1 y Λ_2 .*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{M} = M + M^T$ tiene p valores propios positivos y q valores propios negativos.

Primero veamos que es invariante bajo transformaciones de tipo Λ_1 . Dado que \mathcal{M} es una matriz simétrica por el teorema espectral es congruente a una matriz diagonal D , es decir existe una matriz invertible P tal que $D = P\mathcal{M}P^T$.

Como D es diagonal por el teorema de Sylvester es congruente a una matriz diagonal con p entradas con 1 y q entradas con -1 . Por lo tanto, dado que la congruencia es una relación de equivalencia si dos matrices son congruentes entonces tienen la misma signatura, y dado que la transformación Λ_1 es un caso especial de la congruencia tenemos que la signatura se preserva.

Ahora veamos que se preserva bajo transformaciones de tipo Λ_2 . Como vimos en la prueba del determinante sabemos que la matriz

$$M_2 + M_2^T = \begin{pmatrix} & & * & 0 \\ & M + M^T & \vdots & \vdots \\ & & * & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya sabemos que la signatura es invariante bajo transformaciones de tipo Λ_1 y sabemos que sumar k veces la columna i a la columna j y k veces la fila i a la fila j , es una

transformación de tipo Λ_1 , por lo tanto podemos transformar $M_2 + M_2^T$ mediante una cantidad finita de transformaciones Λ_1 a una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} & & 0 & 0 \\ & M + M^T & \vdots & \vdots \\ & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto podemos calcular sus vectores propios por bloques, el bloque $M + M^T$ sabemos que tiene p vectores propios positivos y q vectores propios negativos.

El segundo bloque es la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es $t^2 - 1 = 0$, por lo tanto tiene un valor propio positivo y un valor propio negativo, por lo que la signatura de $M_2 + M_2^T$ es $p - q + 1 - 1 = p - q$. \square

Definición 4.6. Sea K un nudo y M una matriz de Seifert para K . Si $\mathcal{M} = M + M^T$ entonces definimos la **signatura** del nudo K como la signatura de \mathcal{M} y lo denotamos $\sigma(K)$.

Un resultado importante de la signatura es el siguiente.

Proposición 4.1. Sea K un nudo y K^* el nudo obtenido de reflejar a K , entonces $\sigma(K) = -\sigma(K^*)$.

Demostración. La forma en que se ve una reflexión en el diagrama de un nudo es cambiando todos los cruces, es decir el lazo que pasaba por debajo ahora pasa por arriba y viceversa. Por lo tanto en la superficie de Seifert las bandas que unen a los discos de Seifert estarán girados para la otra dirección y al momento de calcular el número de enlace de las curvas que forman la frontera de las caras de la gráfica de Seifert los signos cambiarán, es decir si antes eran $+1$ ahora serán -1 .

Por lo tanto, si M es la matriz de Seifert de K , la matriz de K^* sera $-M$, entonces si $M + M^T$ tiene p valores propios positivos y q valores propios negativos entonces $-M - M^T$ tendrá q valores propios positivos y p valores propios negativos, es decir $\sigma(K) = -\sigma(K^*)$. \square

Un corolario inmediato de esta proposición es el siguiente.

Corolario 4.1. Si K es un nudo aquiral, es decir que es equivalente a su reflejo, entonces $\sigma(K) = 0$

Demostración. Como $K = K^*$ entonces $\sigma(K^*) = \sigma(K) = -\sigma(K^*)$, por lo tanto $\sigma(K) = 0$. \square

Calculemos la signatura del nudo trébol, recordemos que su matriz de Seifert M es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$M + M^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$\begin{aligned} (t - 2)^2 - 1 &= t^2 - 4t + 4 - 1 \\ &= t^2 - 4t + 3 \\ &= (t - 3)(t - 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto el nudo trébol tiene signatura 2, por lo que no es aquiral.

Referencias

- [1] James Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 1975.
- [2] Kunio Murasugi. *Knot Theory and Its Applications*. Birkhauser, Boston, 1993.
- [3] Colin Adams. *The Knot Book*. W. H. Freeman and Company, New York, 1994.
- [4] K. Janich Th. Brocker. *Introduction to differential topology*. Cambridge University Press, 1982.
- [5] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. 2002.
- [6] Dale Rolfsen. *Knots and Links*. AMS Chelsea Publishing, 1976.