# Trenzas

Sandy Guadalupe Aguilar Rojas

26 de junio a 11 de agosto del 2017

Asesorado por Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña.

**Resumen**

El presente trabajo es una recopilación de definiciones y resultados encaminados al entendimiento del grupo trenzas.

## Contents

# Introducción.

Las trenzas son objetos matemáticos dentro del área de estudio del álgebra, topología y geometría, con diversas e interesantes propiedades, algunas de las cuales se encuentran en este trabajo.

En la primera sección, se dan algunos conocimientos preliminares con los que el lector debe de contar para el entendimiento de las secciones posteriores, los cuales van desde definiciones algebraicas, como grupo libre y presentación de un grupo; hasta el área de la topología, tales como espacio de configuraciones; y de la topología algebraica, como homotopía y grupo fundamental.

La sección de Trenzas Geométricas, nos habla de la definición de trenza como objeto geométrico, con una definición fácil de ver de manera intuitiva, como suele pasar dentro de la geometría; además, se le da estructura algebraica de grupo y se habla de algunas propiedades del grupo de trenzas.

En la tercera sección, se demuestra el teorema de Artin, el cual da la presentación del grupo de trenzas, también conocido como grupo de Artin. Y, para finalizar, en la cuarta y última sección, se presenta al grupo de trenzas y el grupo de trenzas puras como los grupos fundamentales del espacio de configuraciones de $n$ puntos no ordenados, y ordenados, respectivamente.

# 1 Preliminares

## 1.1 Presentaciones de grupos

Los resultados y definiciones de ésta sección pueden ser consultados en [Rot03].

**Definición 1** *Sea $X$ un subconjunto de un grupo $F$. Se dice que $F$ es un grupo libre con base $X$ si, para cada grupo $G$ y cada función $f : X \to G$, existe un uníco homomorfismo $\varphi : F \to G$ con $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. De manera que tenemos el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dotted, "\varphi"] & \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd}$$

**Definición 2** *Sea $X$ un conjunto no vacío. Se dice que $X^{-1}$ es una réplica disjunta de $X$ si son disjuntos y existe una biyección entre $X$ y $X^{-1}$ la cual denotamos po $x \mapsto x^{-1}$.*
*Al conjunto $X \cup X^{-1}$ se le llama alfabeto.*

**Definición 3** *Sea $n$ un entero positivo. Definimos una palabra en $X$ de longitud $n \geq 1$ como una función $w : \{1, 2, \dots n\} \to X \cup X^{-1}$.*

Generalmente, una palara $w$ de longitud $n$ tal que $w(i) = x_i^{e_i}$, con $i = 1, 2, \dots, n, e_i \in \{+1, -1\}$, se denota como

$$w = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n},$$

donde $x_i \in X$. La longitud $n$ de la palabra $w$ se denota como $|w|$.

Denotamos como **palabra vacía** a la palabra de longitud 0, la cual escribimos con el símbolo 1.
Escribiremos como $\mathcal{W}(X)$ al conjunto de todas las palabras en $X$. Si $X = \emptyset$, entonces $W(X)$ tiene como único elemento a la palabra vacía.

**Definición 4** *Sean $u = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ y $w = y_1^{e_1} \cdots y_m^{e_m}$ palabras, donde $x_i, y_j \in X$ para todo $i = 1, ..., n$ y todo $j = 1, ..., m$. Decimos que $u = w$ si y sólo si $n = m, x_i = y_i$ y $e_i = d_i$ para todo $i$.*

De ésto, podemos ver que cada palabra tiene un único deletreo.

**Definición 5** *Si $u = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ y $w = y_1^{d_1} \cdots y_m^{d_m}$ son palabras en $X$, entonces podemos operarla con su yuxtaposición obteniendo la palabra*

$$uw = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} y_1^{d_1} \cdots y_m^{d_m}.$$

*Si 1 es la palabra vacía, entonces $1u = u = u1$ y $1w = w = w1$.*

**Definición 6** *Una subpalabra de una palabra $w = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ es la palabra vacía o una palabra de la forma $u = x_r^{e_r} \cdots x_s^{e_s}$, donde $1 \leq r \leq s \leq n$. El inverso de una palabra $w = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ es $w^{-1} = x_n^{-e_n} \cdots x_1^{-e_1}$.*

Notemos que $(w^{-1})^{-1} = w$ para toda palabra $w$.

**Definición 7** *Una palabra $w$ en $X$ es reducida si $w = 1$ o $w$ no tiene subpalabras de la forma $xx^{-1}$ o $x^{-1}x$, con $x \in X$.*

**Definición 8** *Sean $u$ y $v$ palabras en $X$ y sea $w = uv$. Una **operación elemental** es una **inserción**, ésto es, cambiar $w = uv$ por $w = uaa^{-1}v$ o $w = ua^{-1}av$ para algún $a \in X$, o una **eliminación** de una subpalabra de $w$ de la forma $aa^{-1}$ o $a^{-1}a$, es decir, cambiando $w = uaa^{-1}v$, o $w = ua^{-1}av$, por $w = uv$.*

Escribimos $w \to w'$ para denotar que $w$ y $w'$ difieren por una operación elemental. Decimos que dos palabras en $X$, $u$ y $v$, son **equivalentes** si existen palabras $u = w_1, w_2, \ldots, w_n = v$ para cierto $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$u = w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_n = v.$$

Notemos que ésta es una relación de equivalencia. Denotamos la clase de equivalencia de $u$ como $[u]$.

**Teorema 9** *Si $X$ es un conjunto, entonces el conjunto $F$ de las clases de equivalencia de las palabras en $X$, con la relación dada por las operaciones elementales, es un grupo libre con base $\{[x] : x \in X\}$ con la operación $[u][v] = [uv]$.*

**Demostración.** Si $X = \emptyset$, entonces $W(\emptyset) = \{1\}$ lo que implica que $F = \{1\}$, que claramente es un grupo libre.
Si $X \neq \emptyset$, comenzaremos por probar que $F$ es un grupo con la operación

$$[u][v] = [uv],$$

con $[u], [v] \in F$. Por construcción, tenemos que la asignación es correcta, esto es, que la imagen de la operación está contenida en el contradominio de la misma. Ahora, sean $[u_1], [v_1], [u_2], [v_2] \in F$ tales que $[u_1] = [u_2]$ y $[v_1] = [v_2]$. Sabemos que $u_1$ está relacionada con $u_2$, de ésto, tenemos que existen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W(X)$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$u_1 = w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_n = u_2,$$

de ésto,

$$u_1v_1 = w_1v_1 \to w_2v_1 \to \cdots \to w_nv_1 = u_2v_1,$$

lo cual implica que $u_1v_1$ está relacionado con $u_2v_1$. Además, como $v_1$ está relacionado con $v_2$, tenemos que existen $z_1, z_2, \ldots, z_m \in W(X)$, con $m \in \mathbb{N}$, tales que

$$v_1 = z_1 \to z_2 \to \cdots \to z_m = v_2,$$

de ésto,

$$u_2v_1 = u_2z_1 \to u_2z_2 \to \cdots \to u_2z_m = u_2v_2,$$

es decir, $u_2v_1$ está relacionado con $u_2v_2$, lo cual implica, por transitividad, que $u_1v_1$ está relacionado con $u_2v_2$, ésto es, $[u_1v_1] = [u_2v_2]$. Por lo tanto, la operación está bien definida.
Ahora, sean $[y_1][y_2][y_3] \in F$,tenemos que

$$([y_1][y_2])[y_3] = [y_1y_2][y_3] = [(y_1y_2)y_3],$$

$$[y_1]([y_2][y_3]) = [y_1][y_2y_3] = [y_1(y_2y_3)].$$

Como la yuxtaposición de palabras es asociativa, debido a que preserva el orden de éstas, tenemos que $(y_1y_2)y_3 = y_1(y_2y_3)$, lo cual implica que están relacionadas, por tanto

$$[(y_1y_2)y_3] = [y_1(y_2y_3)].$$

Así, la operación es asociativa.

Podemos ver que el neutro de la operación es la clase de quivalencia de la palabra vacía,

$$[w][1] = [w1] = [W] = [1w] = [1][w],$$

para todo $[w] \in F$. Además, sea $[u] \in F$, tenemos que $[u]^{-1} = [u^{-1}]$ pues

$$[u][u]^{-1} = [u][u^{-1}] = [uu^{-1}] = [1] = [u^{-1}u] = [u^{-1}][u] = [u]^{-1}[u].$$

Así, $F$ es un grupo con dicha operación.

Luego, sea $[g] \in F$, tenemos que $g = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_r^{e_r}$ para ciertos $x_i \in X$ y $e_i \in \{+1, -1\}$, con $i = 1, 2, \ldots, r$ y $r \in \mathbb{N}$, de ésto,

$$[g] = [x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_r^{e_r}] = [x_1^{e_1}][x_2^{e_2}] \cdots [x_r^{e_r}].$$

Así, $F$ es generado por las clases de equivalencia de los elementos de $X$. Ahora, sea $G$ un grupo y sea $f : X \to G$ una función. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & F & \longrightarrow & G \\ & [w] = [x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}] & \mapsto & f(x_1)^{e_1} \cdots f(x_n)^{e_n} \end{array}$$

Tenemos, por construcción, que la asignación es correcta. Luego, sean $[v] = [x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}], [w] = [y_1^{d_1} \cdots y_m^{d_m}] \in F$ tales que $[v] = [w]$, tenemos que $v$ está relacionada con $w$. Ahora, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $v$ y $w$ difieren por una operación elemental, ésto es, si $v = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ entonces $w = x_1^{e_1} \cdots x_r^{e_r} a a^{-1} x_{r+1}^{e_{r+1}} \cdots x_n^{e_n}$, para cierto $r \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r \leq n$ y algún $a \in X$. De ésto,

$$\begin{array}{rl} \varphi([v]) & = f(x_1)^{e_1} \cdots f(x_n)^{e_n} \\ & = f(x_1)^{e_1} \cdots f(x_r)^{e_r} f(a) f(a)^{-1} f(x_{r+1})^{e_{r+1}} \cdots f(x_n)^{e_n} \\ & = f(x_1)^{e_1} \cdots f(x_r)^{e_r} f(x_{r+1})^{e_{r+1}} \cdots f(x_n)^{e_n} \\ & = \varphi([w]) \end{array}.$$

Por tanto, $\varphi$ está bien definida. Luego,

$$\begin{array}{rl} \varphi([v][w]) & = \varphi([vw]) \\ & = \varphi([x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} y_1^{d_1} \cdots y_m^{d_m}]) \\ & = f(x_1)^{e_1} \cdots f(x_n)^{e_n} f(y_1)^{d_1} \cdots f(y_m)^{d_m} \\ & = (f(x_1)^{e_1} \cdots f(x_n)^{e_n})(f(y_1)^{d_1} \cdots f(y_m)^{d_m}) \\ & = \varphi([x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}]) \varphi([y_1^{d_1} \cdots y_m^{d_m}]) \\ & = \varphi([v]) \varphi([w]). \end{array}$$

De ésto, $\varphi$ es un homomorfismo de grupos. Ahora sea $\psi : F \to G$ un homomorfismo tal que $\psi(x) = f(x)$ para toda $x \in X$, tenemos que $\varphi = \psi$, por como construimos a $\varphi$. De ésto, existe un único homomorfismo $\varphi$ entre $F$ y $G$ tal que $\varphi(x) = f(x)$ para toda $s \in X$. Por lo tanto, $F$ es un grupo libre. ■

**Definición 10** *Una presentación de un grupo $G$ es un par ordenado*

$$G = \langle X | R \rangle,$$

*donde $X$ es un conjunto, $R$ es el conjunto de palabras en $X$ y $G = F/N$, donde $F$ es el grupo libre de base $X$ y $N$ es el subgrupo normal generado por $R$, ésto es, el grupo generado al conjugar los elemento de $R$ por elementos de $F$. Al conjunto $X$ se le conoce como* ***generadores*** *y al conjunto $R$ como* ***relaciones****.*

**Proposición 11** *Todo grupo es cociente de un grupo libre.*

**Demostración.** Consideremos un grupo libre $F$ de base $G$, el cual existe por el teorema 9, y la función

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \longrightarrow & G \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

Por definición de grupo libre, tenemos que existe un único homomorfismo $\varphi : F \to G$ tal que $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in G$. Ahora,puesto que $\varphi$ es sobreyectiva y por el primer teorema de isomorfismos, tenemos que

$$F/Ker(\varphi) \cong Im(\varphi) = G.$$

Así,

$$G \cong F/Ker(\varphi).$$

Por tanto, cada grupo $G$ es cociente de un grupo libre. ■

**Corolario 1** *Todo grupo tiene una presentación.*

## 1.2 Espacio de configuraciones

Las definiciones de ésta sección pueden ser consultadas en [Mas91] y [Jac04].

**Definición 12** *Una variedad de dimensión $n$ es un espacio topológico de Hausdorff tal que cada punto en éste está contenido en algún abierto homeomorfo a un abierto en $\mathbb{R}^n$.*

**Definición 13** *Sea $M$ una variedad conexa de dimensión mayor o igual a 2 y sea $n$ un entero positivo, definimos el conjunto*

$$\mathcal{F}_n(M) := \{(x_1, \dots, x_n) \in M \times \cdots \times M : x_i \neq x_j \text{ para todo } i \neq j\}.$$

*Al espacio $\mathcal{F}_n(M)$ se le conoce como espacio de configuraciones de un conjunto de $n$ puntos ordenados en $M$.*

Notemos que a $\mathcal{F}_n(M)$ se le pude asociar la topología inducida por el producto $M \times \cdots \times M$.

**Definición 14** *El espacio cociente*

$$\mathcal{C}_n(M) := \mathcal{F}_n(M)/S_n$$

*definido por la siguiente acción*

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{F}_n(M) \times S_n & \to & \mathcal{F}_n(M) \\ & ((x_1, \dots, x_n), \sigma) & \mapsto & (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \end{array}$$

*es llamado espacio de configuraciones de $n$ puntos no ordenados en $M$.*

## 1.3 Grupo fundamental

Ésta sección está basada en [Cha05], [Cis01] y [Hat02].

**Definición 15** *Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos. Definimos como homotopía a una familia de funciones $\{f_t : X \to Y\}_{t\in[0,1]}$ tal que la función asociada $H : X \times [0,1] \to Y$ dada por $H(x,t) = f_t(x)$ es continua.*

Decimos que dos funciones $f_0, f_1 : X \to Y$ son **homotópicas** si existe una homotopía $F : X \times [0,1] \to Y$ tal que $F(x,0) = f_0(x)$ y $F(x,1) = f_1(x)$. Denotamos que $f_0$ y $f_1$ son homotópicas como $f_0 \simeq f_1$.

**Definición 16** *Una función $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica si existe una función $g : Y \to X$ tal que $fg \simeq Id_Y$ y $gf \simeq Id_X$. Se dice que los espacios $X$ y $Y$ son homotópicamente equivalentes o tienen el mismo tipo de homotopía y se donota como $X \simeq Y$*

**Definición 17** *Dos funciones $f_0, f_1 : X \to Y$ son homotópicas relativamente a un subconjunto $A$ de $X$ si y sólo si existe una homotopía $F : X \times [0,1] \to Y$ entre $f_0$ y $f_1$ tal que*

$$F(x,t) = f_0(x) = f_1(x),$$

*para toda $x \in A$ y todo $t \in [0,1]$. Denotamos que $f_0$ y $f_1$ son homotópicas relativamente por $f_0 \simeq_{rel\ A} f_1$.*

Observemos que si $A = \emptyset$, entonces una homotopía relativa es lo mismo que una homotopía.

**Definición 18** *Sean $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ dos caminos en $X$ tales que $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(1) = \beta(1)$, se dice que son equivalentes si son homotópicos relativamente a $\{0,1\}$. Escribimos, $\alpha \sim \beta$.*

Ésto es, los caminos $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ son equivalentes si existe una función continua

$$F : [0,1] \times [0,1] \to X$$

tal que

$$F(t,0) = \alpha(t),\ F(t,1) = \beta(t),$$

para todo $t \in [0,1]$.

$$F(0,s) = \alpha(0) = \beta(0),\ F(1,s) = \alpha(1) = \beta(1),$$

para todo $s \in [0,1]$

**Definición 19** *Sea $X$ un espacio topológico y $x_0 \in X$ fijo, definimos un lazo $f$ como una trayectoria tal que el punto inicial coincide con el punto final, i.e. $f : [0,1] \to X$ es continua y $f(0) = f(1) = x_0 \in X$, denotemos por $\Omega(X, x_0)$ al conjunto de los lazos cuyo punto inicial o base es $x_0$.*

**Proposición 20** *La relación de homotopía por caminos define una relación de equivalencia en* $\Omega(X, x_0)$, $x_0 \in X$.

**Demostración.**

1. Reflexiva, $f \sim f$ mediante la homotopía $f_t = f$ para todo $t \in [0,1]$.

2. Simétrica, supongamos que $f \sim g$ mediante $f_t$, entonces $g \sim f$ mediante la homotopía inversa $f_{1-t}$.

3. Transitiva, supongamos que $f \sim g$ mediante $f_t$ y $g \sim h$ mediante $g_t$. Definimos

$$h_t = \begin{cases} f_{2t} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_{2t-1} & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

   así $f \sim h$ mediante $h_t$, queremos ver que $H(x,t) = h_t(x)$ es continua. Recordemos que una función definida en la unión de dos conjuntos cerrados es continua si es continua al restringirla en cada uno de los conjuntos cerrados y como

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

   donde $F$ y $G$ son las funciones asociadas de $f_t$ y $g_t$ respectivamente. Además $H$ es continua porque $F$ y $G$ coinciden en $t = \frac{1}{2}$.

■

Dadas dos trayectorias $f, g : [0,1] \to X$ tal que $f(1) = g(0)$ definimos la trayectoria producto $f \cdot g$ mediante

$$f \cdot g = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Observación 21** *Este producto respeta las clases de homotopías.*

**Demostración.** Supongamos que $f_0 \sim f_1$ y $g_0 \sim g_1$ mediante $f_t$ y $g_t$ respectivamente, que $f_0(1) = g_0(0)$ y $f_1(1) = g_1(0)$. Así $f_t \cdot g_t$ define una homotopía $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$. ■

Denotamos por $\pi_1(X, x_0)$ al conjunto de las clases de equivalencia, con la relación de homotopía, de caminos cerrados con punto base $x_0 \in X$.

**Proposición 22** *El conjunto* $\pi_1(X, x_0)$ *es un grupo con respecto al producto* $[f][g] = [f \cdot g]$, *donde* $\pi_1(X, x_0)$ *es el conjunto de las clases de homotopías* $[f]$ *de lazos con punto base* $x_0$.

**Demostración.** Tenemos, por consrucción, que la asignación del producto ,$[f][g] = [f \cdot g]$, es correcta. Además, por la observación anterior, tenemos que está bien definida. Ahora, sean $[f], [g], [h] \in \pi_1(X, x_0)$, tenemos que

$$[f]([g][h]) = [f(gh)],$$

y

$$([f][g])[h] = [(fg)h].$$

Donde, por definición del producto de lazos con punto base $x_0$,

$$f(gh) = \begin{cases} f(4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ g(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y

$$(fg)h = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(4t-2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ h(4t-3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Consideremos la siguiente homotopía,

$$H(t,s) = \begin{cases} f(\frac{4t}{s+1}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ g(4t-s-1) & \text{si } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ h(1 - \frac{4(t-1)}{s-2}) & \text{si } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Notemos que

$$H(t,0) = \begin{cases} f(4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ g(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$H(t,1) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(4t-2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ h(4t-3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$H(0,s) = (fg)h(0) = f(gh)(0),$$
$$H(1,s) = (fg)h(1) = f(gh)(1).$$

De ésto, $f(gh)$ y $(fg)h$ son homotópicamente equivalentes, lo que implica que

$$[f(gh)] = [(fg)h],$$

por tanto, la operación es asociativa.
El elemento neutro de dicha operación es el lazo

$$\begin{array}{rccc} 1_{\pi_1(X,x_0)}: & [0,1] & \to & X \\ & t & \mapsto & x_0 \end{array}$$

Sea $[\tilde{f}] \in \pi_1(X, x_0)$, tenemos que

$$[\tilde{f}]1_{\pi_1(X,x_0)} = \begin{cases} \tilde{f}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$1_{\pi_1(X,x_0)}[\tilde{f}] = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{f}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Consideremos la homotopía

$$\tilde{H}(t,s) = \begin{cases} \tilde{f}(\frac{2t}{2-s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{2-s}{2}, \\ x_0 & \text{si } \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$\tilde{H}(t,0) = \begin{cases} \tilde{f}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ x_0 & \text{si } 1 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$\tilde{H}(t,1) = \begin{cases} \tilde{f}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Además,

$$\tilde{H}(0,s) = \tilde{f}(0) = (\tilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)})(0),$$

$$\tilde{H}(1,s) = \tilde{f}(1) = (\tilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)})(1).$$

De ésto, $[\tilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)}] = [\tilde{f}]$. Luego, consideremos la homotopía

$$G(t,s) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2}, \\ \tilde{f}(\frac{2t}{2-s}) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$G(t,0) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq 0, \\ \tilde{f}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$G(t,1) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{f}(2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Además,

$$G(0,s) = \tilde{f}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)}\tilde{f})(0),$$

$$G(1,s) = \tilde{f}(1) = (1_{\pi_1(X,x_0)}\tilde{f})(1).$$

De ésto, $[1_{\pi_1(X,x_0)}\tilde{f}] = [\tilde{f}]$. Así,

$$[1_{\pi_1(X,x_0)}\tilde{f}] = [\tilde{f}] = [\tilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)}].$$

Luego, sea $\tilde{g} \in \pi_1(X,x_0)$, definimos su elemento inverso $\tilde{g}$ como

$$\tilde{g}^{-1}(t) = \tilde{g}(1-t)$$

.

Entonces,

$$\tilde{g}\tilde{g}^{-1} = \begin{cases} \tilde{g}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y

$$\tilde{g}^{-1}\tilde{g} = \begin{cases} \tilde{g}(1-2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Ahora, consideremos la siguiente homotopía

$$F(t,s) = \begin{cases} \tilde{g}(2ts) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(2s(1-t) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$F(t,s) = \begin{cases} \tilde{g}(0) = x_0 & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(0) = x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

$$F(t,1) = \begin{cases} \tilde{g}(2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Además,

$$F(0,s) = \tilde{g}\tilde{g}^{-1}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)})(0) = x_0,$$

$$F(1,s) = \tilde{g}\tilde{g}^{-1}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)})(1) = x_0.$$

De ésto, $[\tilde{g}\tilde{g}^{-1}] = [1_{\pi_1(X,x_0)}]$

Ahora, consideremos la homotopía

$$\tilde{F}(t,s) = \begin{cases} \tilde{g}(s(1-2t)) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(s(2t-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$\tilde{F}(t,0) = \begin{cases} \tilde{g}(0) = x_0 & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(0) = x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

$$\tilde{F}(t,1) = \begin{cases} \tilde{g}(1-2t)) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Además,

$$F(0,s) = \tilde{g}^{-1}(0)\tilde{g} = (1_{\pi_1(X,x_0)})(0) = x_0,$$

$$F(1,s) = \tilde{g}^{-1}(0)\tilde{g} = (1_{\pi_1(X,x_0)})(1) = x_0.$$

De ésto, $[\tilde{g}^{-1}\tilde{g}] = [1_{\pi_1(X,x_0)}]$. Así,

$$[\tilde{g}^{-1}\tilde{g}] = [1_{\pi_1(X,x_0)}] = [\tilde{g}\tilde{g}^{-1}].$$

Por lo tanto, $\pi_1(X,x_0)$ es un grupo. ■

Al grupo $\pi_1(X,x_0)$, se le conoce como el **grupo fundamental** de $X$ con punto base $x_0$.

## 2 Trenzas geométricas.

Las definiciones y resultados de ésta y las siguientes secciones pueden ser consultados en [Gon11], [Par07], [Gla12], [Jac04] y [Nav16].

**Definición 23** *Consideremos el espacio Euclideano de dimensión 3, y los planos tales que* $z = 0$ *y* $z = 1$.
*Sean* $P_i$ *y* $Q_i$ *los puntos con coordenadas* $(i, 0, 1)$ *y* $(i, 0, 0)$ *respectivamente, con* $i \in \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$.
*Una trenza de* $n$ *cuerdas es un sistema de* $n$ *arcos* $a_1, a_2, \dots, a_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ *tales que* $a_i$ *conecta al punto* $P_i$ *con el punto* $Q_{\pi(i)}$*, para alguna permutación* $\pi \in S_n$*; o equivalentemente, una función* $\bigcup_{i=1}^{n} [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ *. Además, debe de cumplirse lo siguiente:*

- *Cada arco* $a_i$ *intersecta al plano* $z = t$ *una y sólo una vez, para cualquier* $t \in [0, 1]$.
- *Los arcos* $a_1, \dots, a_n$ *intersectan el plano* $z = t$ *en* $n$ *puntos distintos para todo* $t \in [0, 1]$.

A los arcos de las trenzas se les conoce como cuerdas de la trenza, y la permutación $\pi$ se conoce como permutación de la trenza. Si esta permutación es trivial, entonces se dice que es una **trenza pura**.
Los cruces de las trenzas se denominan positivos o negativos según el arco que pase sobre el otro. (Véase Figura 1)

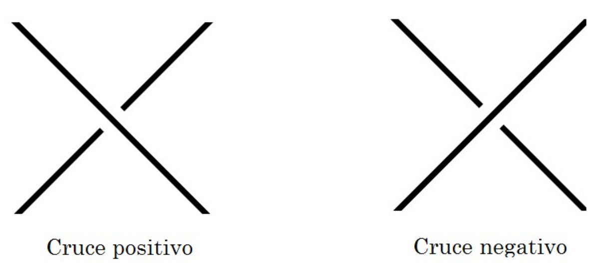



Figure 1: Cruces en los diagramas de trenzas

**Definición 24 (Equivalencia de trenzas)** *Dos* $n$*-trenzas* $\beta_0$ *y* $\beta_1$ *con la misma permutación* $\pi$ *son equivalentes u homotópicas si existe una homotopía a través de las trenzas* $\beta_t$*, con permutación* $\pi$*, de* $\beta_0$ *a* $\beta_1$*, con* $t \in [0, 1]$*, es decir, existe una función* $H : [0, 1] \times \bigcup_{i=1}^{n} \to \mathbb{R}^3$ *tal que la restricción* $\{t\} \times \bigcup_{i=1}^{n} \to \mathbb{R}^3$ *es una trenza, para toda* $t \in [0, 1]$.

Denotaremos por $B_n$ al cociente del conjunto de $n$-trenzas por la relación de equivalencia de trenzas. Notemos que los elementos de $B_n$ son clases de equivalencia; además, $B_n$ representa al conjunto de $n$-trenzas no equivalentes.
Al conjunto de las clases de equivalencia de trenzas puras, se le denota por $\mathcal{PB}_n$.

Dadas dos $n$-trenzas, $\alpha$ y $\beta$, podemos operarlas al unir la parte inferior de $\alpha$ con la superior de $\beta$ y escalarlas, para obtener una una nueva trenza a la cual denotamos como $\alpha\beta$. Es fácil ver que dicha operación esta bien definida en $B_n$. Equivalentemente, la composición asocia a cada arco $a_i : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ de la trenza $\alpha$ y a cada arco $b_i : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ de la trenza $\beta$, un nuevo arco $a_ib_i$ tal que

$$ab_i(t) = \begin{cases} a_i(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ b_i(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dado que las trenzas son sistemas de arcos, la composición de éstas se puede ver como

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

A esta operación se le llama **composición**.

**Definición 25** *Una trenza elemental $\sigma_i$ es la $n$-trenza formada por el cruce de la $i$-ésima cuerda sobre la $(i+1)$-ésima cuerda. Dicho cruce es el único cruce de la $n$-trenza, las $n-2$ cuerdas restantes son líneas paralelas. (Véase Figura 2)*

*El inverso de una trenza elemental, $\sigma_i^{-1}$, es la $n$-trenza formada por el cruce de la $(i+1)$-ésima cuerda sobre la $i$-ésima cuerda. Dicho cruce es el único cruce de la $n$-trenza, las $n-2$ cuerdas restantes son líneas paralelas. (véase Figura 3)*

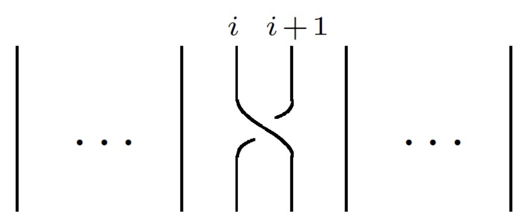



Figure 2: Trenza elemental $\sigma_i$.

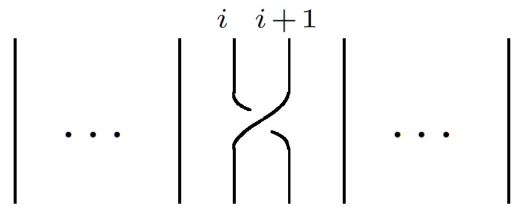



Figure 3: Inverso de trenza elemental $\sigma_i^{-1}$.

**Proposición 26** *Toda $n$-trenza puede ser expresada como la composición de trenzas elementales.*

**Demostración.** Procederemos por inducción sobre el número de cruces de la $n$-trenza.

Consideremos una trenza, $\alpha$, de un sólo cruce. Tenemos que dicho cruce se forma al pasar la $j$-ésima cuerda sobre la $(j+1)$-ésima cuerda, o al pasar la $(j+1)$-ésima cuerda sobre la $j$-ésima cuerda, para cierto $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$. De ésto, $\alpha = \sigma_j$ ó $\alpha = \sigma_j^{-1}$. De ésto, toda trenza de un cruce se puede expresar como la composición de una única trenza elemental o el inverso de una trenza elemental.

Supongamos que cualquier trenza de $k$ cruces puede expresarse como composición de trenzas elementales, con $k \in \mathbb{N}$.

Ahora, sea $\beta$ una $n$-trenza con $k+1$ cruces. Podemos suponer que $\beta$ es equivalente a una trenza $\tilde{\beta}$ donde $k$ cruces estan en la parte superior y un cruce se encuentra en la parte inferior, de ésto, $\beta$ puede escribirse como la composición de una trenza de $k$ cruces con una de un único cruce. Por hipótesis de inducción tenemos que la $n$-trenza de $k$ cruces puede escribirse como la composición de trenzas elementales; además, como se dijo anteriormente, toda trenza de un único cruce se puede escribir como una trenza elemental. De ésto, $\beta$ puede escribirse como la composición de trenzas elementales.

Por lo tanto, por el principio de inducción matemática, toda $n$-trenza puede expresarse como la composición de trenzas elementales. ■

Observemos que $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ si $|i-j| > 1$, con $i, j \in \{1, ..., n-1\}$. (Véase Figura 4).

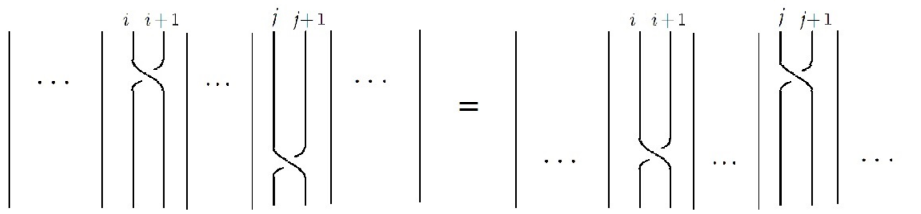



Figure 4: $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ si $|i-j| > 1$, con $i, j \in \{1, ..., n-1\}$

Además, $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$, con $i \in \{1, ..., n-1\}$. (Véase figura 5).

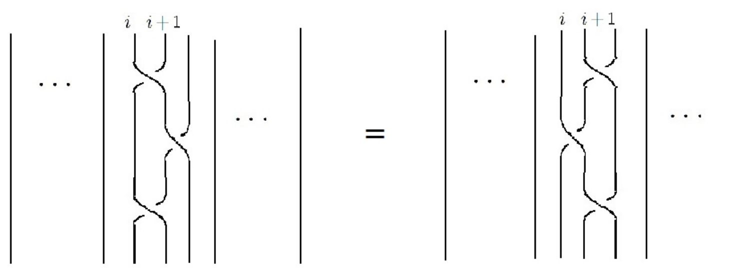



Figure 5: $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$, con $i \in \{1, ..., n-1\}$

**Proposición 27** *El conjunto $B_n$ tiene estructura de grupo.*

**Demostración.** Consideremos la asignación

$$\begin{array}{rccc} \circ : & B_n \times B_n & \to & B_n \\ & ([\alpha], [\beta]) & \mapsto & [\alpha\beta] \end{array}$$

donde $\alpha\beta$ es la composición de la trenza $\alpha$ con la trenza $\beta$, esto es, la trenza resultante de unir la parte inferior de $\alpha$ con la parte superior de $\beta$.

Por construcción, tenemos que la asignación es correcta. Ahora, sean

$$([\alpha_1], [\beta_1]), ([\alpha_2], [\beta_2]) \in B_n \times B_n$$

tales que son iguales, ésto es $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ y $[\beta_1] = [\beta_2]$. Tenemos que $\alpha_1$ está relacionada con $\alpha_2$ y $\beta_1$ está relacionada con $\beta_2$, lo que significa, por la definición de equivalencia de trenzas, que existe una homotopía entre ellas por medio de trenzas; ésto es, existen un par de funciones $H_\alpha, H_\beta : \bigcup_{i=1}^{n} [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ tales que $H_\alpha(t,0)=\alpha_1, H_\alpha(t,1)=\alpha_2, H_\beta(t,0)=\beta_1$ y $H_\beta(t,1)=\beta_2$. Consideremos la función $G:\bigcup_{i=1}^{n}[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}^3$ tal que

$$G(t,s)=\begin{cases} H_\alpha(2t,s) & \text{si } 0\le t\le 1/2 \\ H_\beta(2t-1,s) & \text{si } 1/2\le t\le 1 \end{cases}$$

Notemos que

$$G(t,0)=\begin{cases} H_\alpha(2t,0)=\alpha_1 & \text{si } 0\le t\le 1/2 \\ H_\beta(2t-1,0)=\beta_1 & \text{si } 1/2\le t\le 1 \end{cases}$$

esto es, $G(t,0)=\alpha_1\beta_1$. Además,

$$G(t,1)=\begin{cases} H_\alpha(2t,1)=\alpha_2 & \text{si } 0\le t\le 1/2 \\ H_\beta(2t-1,1)=\beta_2 & \text{si } 1/2\le t\le 1 \end{cases}$$

es decir, $G(t,1)=\alpha_2\beta_2$. De ésto, $\alpha_1\beta_1$ está relacionada con $\alpha_2\beta_2$, esto implica que $[\alpha_1\beta_1]=[\alpha_2\beta_2]$. Por lo tanto, $\circ$ está bien definida.

Lo cual implica que $\alpha_1\beta_1$ está relacionado con $\alpha_2\beta_2$ y así, $[\alpha_1\beta_1]=[\alpha_2\beta_2]$. Por tanto, $\circ$ está bien definida.

Ahora, dado de que la composición de trenzas está definida como la concatenación al yutxtaponer las trenzas, es fácil ver que, dadas tres $n$-trenzas $[\alpha],[\beta],[\theta]\in B_n$, $[\alpha]\circ([\beta]\circ[\theta])=([\alpha]\circ[\beta])\circ[\theta]$. Por tanto, $\circ$ es asociativa.

Notemos que el neutro de la operación $\circ$, $1_{B_n}$ es la $n$-trenza que se compone por $n$ líneas paralelas, pues la composición con dicha trenza consiste simplemente en el enlongamiento de las cuerdas de la trenza.

Sea $[\gamma]\in B_n$, sabemos que $[\gamma]$ puede esribirse como la composición de trenzas elementales, ésto es

$$[\gamma]=\sigma_{i_1}^{e_{i_1}}\sigma_{i_2}^{e_{i_2}}\cdots\sigma_{i_r}^{e_{i_r}},$$

donde $r\in\mathbb{N}$, $i_s\in\{1,\ldots,n\}$ y $e_{i_s}\in\{+1,-1\}$ para $s\in\{1,\ldots,r\}$. Definimos el inverso de $[\gamma]$ como la trenza

$$[\gamma]^{-1}=(\sigma_{i_r}^{e_{i_r}})^{-1}(\sigma_{i_{r-1}}^{e_{i_{r-1}}})^{-1}\cdots(\sigma_{i_1}^{e_{i_1}})^{-1}.$$

Así,

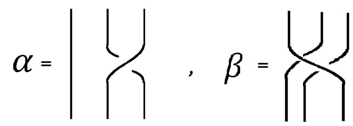
$$[\gamma]\circ[\gamma]^{-1}=\sigma_{i_1}^{e_{i_1}}\cdots\sigma_{i_r}^{e_{i_r}}(\sigma_{i_r}^{e_{i_r}})^{-1}\cdots(\sigma_{i_1}^{e_{i_1}})^{-1}=1_{B_n},$$

$$[\gamma]^{-1}\circ[\gamma]=(\sigma_{i_{r-1}}^{e_{i_{r-1}}})^{-1}\cdots(\sigma_{i_1}^{e_{i_1}})^{-1}\sigma_{i_1}^{e_{i_1}}\cdots\sigma_{i_r}^{e_{i_r}}=1_{B_n}.$$

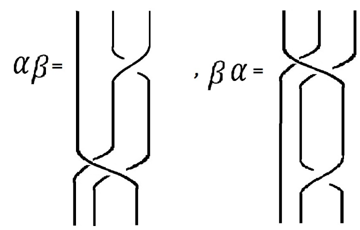
Por lo tanto, $B_n$ es un grupo con la operación composición. ∎

**Proposición 28** *El grupo de trenzas $B_n$ es no abeliano para $n\ge 3$.*

**Demostración.** Comenzaremos con el caso $n=3$. Consideremos las trenzas siguientes:



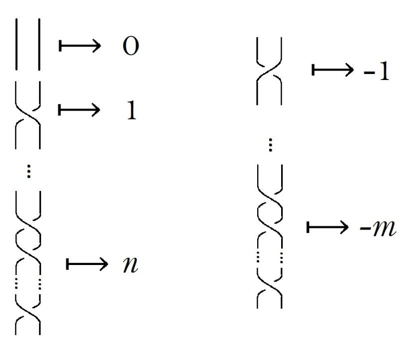
Notemos que la composición de dichas trenzas no conmuta, pues la permutación de dichas trenzas son diferentes, como puede notarse en la siguiente imagen.



Así, $B_3$ es no abeliano. Ahora, para $n > 3$ basta con considerar las trenzas tales que los primeros tres arcos son como las trenzas del caso $n = 3$ y las $n - 3$ cuerdas restantes, son líneas paralelas. Es fácil notar que dichas trenzas no conmutan con la composición. Así, $B_n$ es no abeliano para $n \geq 3$. ■

**Proposición 29** *El grupo de 2-trenzas, $B_2$, es isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

**Demostración.** Consideremos la función $\varphi : B_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que a cada trenza le asigna si número de cruces, ya sean negativos o positivos. Esto es:



Tenemos, por construcción que la asignación correcta y además, $\varphi$ está bien definida.
Luego, sean $\alpha, \beta \in B_2$, es fácil notar que $\varphi(\alpha \circ \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$, puesto que, de tener signos iguales, al realizar la composición, los cruces se suman pues la trenza se enrolla en el mismo sentido; de tener signos contrarios, la trenza se desenrrollaría hasta tener el número de cruces resultante de la resta de los cruces de las trenzas originales. Además, $\varphi(1_{B_2}) = 0$ por construcción. Así, $\varphi$

es homomorfismo de grupos.
Notemos ahora que $Ker(\varphi) = 1_{B_2}$ y $Im(\varphi) = \mathbb{Z}$, esto implica que $\varphi$ es isomorfismo de grupos. Por lo tanto, $B_2 \cong \mathbb{Z}$. ■

**Proposición 30** *Si $n \geq 2$, el grupo $B_2$ es infinito.*

**Demostración.** Consideremos el caso $n = 2$. De la proposición anterior, tenemos que $B_2 \cong \mathbb{Z}$, lo cual implica que $B_2$ es infinito.
Ahora, para $n > 2$, notemos que a cada 2-trenza le podemos asociar una $n$-trenza con las primeras cuerdas igual a la 2-trenza y las $n-2$ cuerdas restantes como líneas paralelas. De ésto, $B_n$ es infinito.
Así, $B_n$ es infinito para $n \geq 2$. ■

# 3 Presentación del grupo de trenzas

**Lema 31** *Sea $p : \mathcal{PB}_n \to \mathcal{PB}_{n-1}$ la proyección. Entonces, $p$ es sobreyectiva y $Ker(p) \cong F_{n-1}$, donde $F_{n-1}$ es el grupo libremente generado por los elementos*

$$\hat{x}_i = (\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})\sigma_i^{-1}(\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n-1},\ 1 \leq i \leq n-1).$$

*Recordemos que los elementos $\sigma_i$ denotan trenzas elementales.*

*Más aún, la sucesión exacta corta*

$$1 \to F_{n-1} \to \mathcal{PB}_n \to \mathcal{PB}_{n-1} \to 1$$

*se exinde y entonces, $\mathcal{PB}_n \cong F_{n-1} \rtimes \mathcal{PB}_{n-1}$. En particular, todo elemento de $\mathcal{PB}_n$ se puede escribir de manera única como el producto de $x_i$'s y un elemento en $\mathcal{PB}_n$. Esto es, sea $w \in \mathcal{PB}_n$, entonces*

$$w = \hat{x}_{i_1}^{e_1} \cdots \hat{x}_{i_r}^{e_r} \tilde{w},$$

*donde $\hat{x}_j \in F_{n-1}, e_j = \pm 1, j = 1, \ldots, r, r \in \mathbb{N}$ y $\tilde{w} \in \mathcal{PB}_{n-1}$.*

**Teorema 32 (Teorema de Artin)** *Sea $B_n$ el grupo de trenzas, tenemos que*

$$B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} | \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ si } |i-j| > 1, \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},\ \text{si } i = 1, \ldots, n-2\rangle$$

**Demostración.** Sea $G$ un grupo con presentación

$$\langle y_1, \ldots, y_{n-1} | y_iy_j = y_jy_i \text{ si } |i-j| \geq 2, y_iy_{i+1}y_i = y_{i+1}y_iy_{i+1} \text{ si } i = 1, \ldots, n-2\rangle,$$

probaremos que $G \cong B_n$. Consideremos la siguiente asignación

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & F_n & \longrightarrow & B_n \\ & w = y_{i_1}^{e_1} \cdots y_{i_k}^{e_k} & \mapsto & \sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k}, \end{array}$$

donde $F_n$ es el grupo libre generado por los elementos $y_1, \ldots, y_n$.

Por la propiedad universal de grupos libres, tenemos que $\varphi$ está bien definida y es un homomorfismo de grupos.

Luego, sea $\beta \in B_n$, sabemos que podemos expresarla por medios de trenzas elementales, esto es,

$$\beta = \sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_n}^{e_n},$$

con $i_j \in \mathbb{N}$ y $e_j \in \{+1, -1\}$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Tenemos que existe una palabra en $F_n$, $\tilde{w} = y_{i_1}^{e_1} \cdots y_{i_n}^{e_n}$. Además,

$$\varphi(\tilde{w}) = \varphi(y_{i_1}^{e_1} \cdots y_{i_n}^{e_n}) = \sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_n}^{e_n} = \beta$$

Por tanto, $\varphi$ es sobreyectiva, lo cual implica que $Im(\varphi) = B_n$.
Denotaremos $\langle R \rangle^{\triangleleft}$ al subgrupo normal generado por las relaciones $R$ de la presentacón, esto es,

$$\langle R \rangle^{\triangleleft} = \{\prod_{i \in I} g^{-1} r_i^{\epsilon_i} g : g \in F_n, r_i \in R, \epsilon_i = \pm 1\}.$$

Ahora, sea $w \in \langle R \rangle^{\triangleleft}$, tenemos que $w = \prod\limits_{i \in I} y_k^{-1} r_i^{\epsilon_i} y_k$, para cierto $y_k \in F_n$ y cierto cunjunto de índices $I$. Luego,

$$\varphi(\prod_{i \in I} y_k^{-1} r_i^{\epsilon_i} y_k) = \prod_{i \in I} \varphi(y_k^{-1} r_i^{\epsilon_i} y_k) = \prod_{i \in I} \varphi(y_k^{-1}) \varphi(r_i^{\epsilon_i}) \varphi(y_k).$$

Notemos que $\varphi(r_i) = 1_{B_n}$, puesto que

$$\varphi(y_i y_j y_i^{-1} y_j^{-1}) = \sigma_i \sigma_j \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} = 1_{B_n},$$

si $|i - j| \geq 2$. Además, para todo $i = 1, \ldots, n-1$

$$\varphi(y_i y_{i+1} y_i y_{i+1}^{-1} y_i^{-1} y_{i+1}^{-1}) = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} = 1_{B_n}.$$

De ésto,

$$\begin{aligned} \varphi(\prod_{i \in I} y_k^{-1} r_i^{\epsilon_i} y_k) &= \prod_{i \in I} \varphi(y_k^{-1}) 1_{B_n} \varphi(y_k) \\ &= \prod_{i \in I} \varphi(y_k^{-1}) \varphi(y_k) \\ &= \prod_{i \in I} \sigma_k^{-1} \sigma_k \\ &= \prod_{i \in I} 1_{B_n} \\ &= 1_{B_n}. \end{aligned}$$

Así, $w \in Ker(\varphi)$. Por tanto, $\langle R \rangle^{\triangleleft} \subseteq Ker(\varphi)$.

Luego, sea $u = y_{j_1}^{d_1} \cdots y_{j_m}^{d_m} \in Ker(\varphi)$, tenemos que

$$\varphi(u) = \varphi(y_{j_1}^{d_1} \cdots y_{j_m}^{d_m}) = \sigma_{j_1}^{d_1} \cdots \sigma_{j_m}^{d_m} = 1_{B_n}.$$

A continuación mostraremos que podemos llevar la palabra $u$ a la forma trivial, por medio de relaciones en la presentación, e inserciones y eliminación de subpalabras de la forma $y_i^{\pm 1} y_i^{\mp 1}$.
Para todo $k = 0, \ldots, m$, definimos a $l_k$ como la posición de la $n$-ésima cuerda

de la $n$-trenza, $\varphi(u)$, al final de el movimiento representado por $\sigma_{l_1}^{d_1}\cdots\sigma_{l_k}^{d_k}$. Notemos que como $\varphi(u) = 1_{B_n}$, entonces $l_0 = l_m = n$. Ahora, denotemos por

$$\alpha_i = y_i y_{i+1}\cdots y_{n-1},$$

para $i = 1,\ldots,n-1$ y $x_r \in G$; además, $x_n = 1_G$. Observemos que $\varphi(\alpha_i)$ representa a la trenza que envía la $i$-ésima cuerda a la $n$-ésima posición.
Ahora, usando inserciones permitidas, tenemos que

$$\begin{aligned} u &= y_{j_1}^{d_1}\cdots y_{j_m}^{d_m} \\ &= (\alpha_{l_0}^{-1} y_{j_1}^{d_1}\alpha_{l_1})(\alpha_{l_1}^{-1} y_{j_2}^{d_2}\alpha_{l_2})\cdots(\alpha_{l_{m-1}}^{-1} y_{j_m}^{d_m}\alpha_{l_m}) \end{aligned}$$

Observemos que cada una de las ternas de elementos entre paréntesis tiene alguna de las siguientes formas.

(1) $(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_i(y_{i+1}\cdots y_{n-1})$
Notemos que

$$\begin{aligned} (y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_i(y_{i+1}\cdots y_{n-1}) &= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})(y_i y_{i+1}\cdots y_{n-1}) \\ &= (y_i\cdots y_{n-1}^{-1})^{-1}(y_i\cdots y_{n-1}) \\ &= 1_G. \end{aligned}$$

De ésto, esta palabra es equivalente a la palabra trivial, por tanto, podemos eliminarla.

(2) $(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_i^{-1}(y_{i+1}\cdots y_{n-1})$
Denotaremos esta palabra por $x_i^{-1}$.

(3) $(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_{i-1}(y_{i-1}\cdots y_{n-1})$
Denotaremos esta palabra como $x_{i-1}$.

(4) $(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_{i-1}(y_{i-1}\cdots y_{n-1})$
Notemos que

$$\begin{aligned} (y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_{i-1}^{-1}(y_{i-1}\cdots y_{n-1}) &= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_{i-1}^{-1}(y_{i-1}\cdots y_{n-1}) \\ &= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1}y_{i-1}^{-1})(y_{i-1}\cdots y_{n-1}) \\ &= (y_{i-1}\cdots y_{n-1})^{-1}(y_{i-1}\cdots y_{n-1}) \\ &= 1_G. \end{aligned}$$

Ésto implica que la palabra es equivalente a la palabra trivial, por tanto, podemos eliminarla.

(5) $(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_k^{\pm1}(y_i\cdots y_{n-1})$, con $k < i-1$. Notemos que, usando las relaciones, podemos conmutar a $y_k^{\pm1}$ con las otras letras, de ésto,

$$\begin{aligned} (y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_k^{\pm1}(y_i\cdots y_{n-1}) &= y_k^{\pm1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})(y_i\cdots y_{n-1}) \\ &= y_k^{\pm1}(y_{n-1}\cdots y_i)^{-1}(y_i\cdots y_{n-1}) \\ &= y_k^{\pm1}1_G \\ &= y_k^{\pm1}. \end{aligned}$$

Así, podemos sustituir esta palabra por $y_k^{\pm1}$.

(6) $(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_k^{\pm 1}(y_i\cdots y_{n-1})$, con $k>i$
Primero, notemos que, debido a la relación $y_iy_j=y_jy_i$ si $|i-j|>1$, tenemos que

$$\begin{aligned} y_k(y_i\cdots y_{n-1}) &= y_iy_ky_{i+1}\cdots y_{n-1} \\ &= y_iy_{i+1}\cdots y_ky_{k-1}y_ky_{k+1}\cdots y_{n-1}. \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos la relación $x_ix_{i+1}x_i=x_{i+1}x_ix_{i+1}$ y obtenemos

$$\begin{aligned} y_k(y_i\cdots y_{n-1}) &= y_iy_{i+1}\cdots y_ky_{k-1}y_ky_{k+1}\cdots y_{n-1} \\ &= y_iy_{i+1}\cdots y_{k-1}y_ky_{k-1}y_{k+1}\cdots y_{n-1} \end{aligned}$$

Luego, de nuevo por la relación $y_iy_j=y_jy_i$ si $|i-j|>1$ tenemos que

$$\begin{aligned} y_k(y_i\cdots y_{n-1}) &= y_iy_{i+1}\cdots y_{k-1}y_ky_{k-1}y_{k+1}\cdots y_{n-1} \\ &= y_iy_{i+1}\cdots y_{k-1}y_ky_{k+1}y_{k-1}y_{k+2}\cdots y_{n-1} \\ &= y_iy_{i+1}\cdots y_{k-1}y_ky_{k+1}y_{k+2}\cdots y_{n-1}y_{k-1} \\ &= (y_i\cdots y_{n-1})y_{k+1}. \end{aligned}$$

Ahora, dado que $y_k(y_i\cdots y_{n-1})=(y_i\cdots y_{n-1})y_{k+1}$, podemos notar que

$$(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_k^{\pm 1}(y_i\cdots y_{n-1})=(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})(y_i\cdots y_{n-1})y_k^{\pm 1},$$

de ésto,

$$(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_k^{\pm 1}(y_i\cdots y_{n-1})=y_k^{\pm 1}.$$

Notemos que, de esta manera, hemos expresado a la palabra $u$ como el producto de elementos de la forma $y_1,\ldots,y_{n-2},x_1,\ldots,x_n-1$ y sus inversos. Observemos que $y_{n-1}^{\pm 1}$ aparece únicamente como parte de alguna palabra $x_i^{\pm 1}$.

A continuación, probaremos que la palabra $y_i^{-1}x_jy_i$ puede escribirse como producto de $x_1,\ldots,x_{n-1}$ y sus inversos, para $i=1,\ldots,n-2$ y $j=1,\ldots,n-1$.

Si $i<j-1$, tenemos, por las relaciones, que

$$\begin{aligned} y_i^{-1}x_jy_i = \quad & y_i^{-1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{j+1}^{-1})y_j(y_j\cdots y_{n-1})y_i \\ &= (y_i^{-1}y_i)(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{j+1}^{-1})y_j(y_j\cdots y_{n-1}) \\ &= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{j+1}^{-1})y_j(y_j\cdots y_{n-1}) \\ &= x_j \end{aligned}$$

Si $i = j - 1$, esto es, $j = i + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
y_i^{-1}x_jy_i \quad &= y_i^{-1}x_{i+1}y_i \\
&= y_i^{-1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}(y_{i+1}\cdots y_{n-1}) \\
&= y_i^{-1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}^2(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_i^{-1}y_{i+1}^2y_i(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_i^{-1}y_{i+1}y_{i+1}y_i(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})(y_i^{-1}y_{i+1}y_i)(y_i^{-1}y_{i+1}y_i)(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})(y_{i+1}y_iy_{i+1}^{-1})(y_{i+1}y_iy_{i+1}^{-1})(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}y_i(y_{i+1}^{-1}y_{i+1}y_i)y_{i+1}^{-1}(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}y_iy_iy_{i+1}^{-1}(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}(y_{i+1}\cdots y_{n-1})(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+1}^{-1})y_iy_iy_{i+1}^{-1}(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}(y_{i+1}\cdots y_{n-1})(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+1}^{-1})y_iy_i(y_{i+1}\cdots y_{n-1}) \\
&(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+1}^{-1})y_{i+1}^{-1}(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}(y_{i+1}\cdots y_{n-1})(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+1}^{-1})y_i(y_i\cdots y_{n-1}) \\
&(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+1}^{-1})y_{i+1}^{-1}(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= x_{i+1}x_ix_{i+1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Si $i = j$, tenemos que

$$\begin{aligned}
y_i^{-1}x_jy_i \quad &= y_i^{-1}x_iy_i \\
&= y_i^{-1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+1}^{-}1)y_i(y_iy_{i+1}y_{i+2}\cdots y_{n-1})y_i \\
&= y_i^{-1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+1}^{-}1)y_i^2y_{i+1}(y_{i+2}\cdots y_{n-1})y_i \\
&= y_i^{-1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+1}^{-}1)y_i^2y_{i+1}y_i(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= y_i^{-1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1}y_{i+1}^{-}1)y_{i+1}y_iy_{i+1}^2(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= y_i^{-1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})(y_{i+1}^{-}1y_{i+1})y_iy_{i+1}^2(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= y_i^{-1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_iy_{i+1}^2(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= y_i^{-1}y_i(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}^2(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}^2(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\
&= x_{i+1}.
\end{aligned}$$

Si $i > j$, tenemos que $y_ix_j = x_jy_i$, de ésto,

$$\begin{aligned}
y_i^{-1}x_jy_i \quad &= y_i^{-1}y_ix_j \\
&= x_j.
\end{aligned}$$

Así, hemos probado que las palabras de la forma $y_i^{-1}x_jy_i$ pueden ser escritas como palabras con elementos $x_1, \ldots, x_{n-1}$ y sus inversos, lo cual implica que las palabras de la forma $y_ix_jy_i^{-1}$ también pueden expresarse como palabras con dichos elementos, pues, si $i < j - 2$ o $i > j$, entonces

$$y_ix_jy_i^{-1} = x_j,$$

si $i = j - 1$,

$$y_ix_jy_i^{-1} = y_ix_{i+1}y_i^{-1} = x_i,$$

y Si $i = j$, entonces

$$y_ix_jy_i^{-1} = y_ix_iy_i^{-1} = x_i^{-1}x_{i+1}x_i.$$

De ésto, tenemos que la palabra $u$, una vez escrita en función de

$$y_1, \cdots, y_{n-2}, x_1, \cdots, x_{n-1}$$

y sus inversos, podemos reacomodarla, de manera que los elementos de la forma $y_i^{\pm 1}$ se encuentren a la derecha. Así,

$$\varphi(u) = \varphi(w_1)\varphi(w_2),$$

donde $w_1$ es una palabra conformada por $x_1, \ldots, x_{n-1}$ y sus inversos, y $w_2$ es una palabra formada por $y_1, \ldots, y_{n-2}$ y sus inversos.

Ahora, por el lema anterior, tenemos que podemos descomponer a cualquier trenza pura, de manera única, como el producto de elementos de la forma $\hat{x} = (\sigma_{n-1} \ldots \sigma_i^{-1})\sigma_i^{-1}(\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{n-1})$ y un elemento en $\mathcal{PB}_{n-1}$. Notemos que los elementos de la forma $(\sigma_{n-1} \ldots \sigma_i^{-1})\sigma_i^{-1}(\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{n-1})$ coinciden con $\varphi(x_i)$, con los $x_i$ definidos en ésta demostración y $u$ tiene una única descomposición $w_1 w_2$, lo cual implica que $w_1$ es el elemento trivial en $F_{n-1}$ y $w_2$ representa el elemento trivial el $\mathcal{PB}_{n-1}$. Ahora, como $F_{n-1}$ está generado libremente por $x_1, \ldots, x_n$, tenemos que $w_1$ puede reducirse a la palabra trivial por medio de eliminaciones permitidas, lo cual implica que $u = w_2$, la cual es una palabra de elementos $y_1, \ldots, y_{n-2}$ y sus inversos y representa la trenza trivial en $\mathcal{PB}_{n-1}$. Se sigue la prueba de manera inductiva sobre $n$. Así, $ker(\varphi) \subset \langle R \rangle^{\lhd}$, y por tanto, $ker(\varphi) = \langle R \rangle^{\triangle}$. Luego, por el primer teorema de isomorfismos, tenemos que

$$B_n \cong \frac{G}{\langle R \rangle^{\lhd}}.$$

Por tanto,

$$B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} | \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i-j| > 1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \text{ si } i = 1, \ldots, n-2 \rangle$$

■

# 4 Trenzas en el espacio de configuraciones

**Proposición 33** *Sea $P_0 = (1, 2, \ldots, n) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$, se tiene que*

$$\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0) = \mathcal{PB}_n.$$

**Demostración.** Consideremos la asignación

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{PB}_n & \to & \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0) \\ & [\beta] & \mapsto & [\varphi(\beta)] \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rccc} \varphi(\beta) : & [0,1] & \to & \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0) \\ & t & \mapsto & (b_1(t), \ldots, b_n(t)), \end{array}$$

donde $b_1, \ldots, b_n$ son los $n$ arcos que conforman a $\beta$.

Sea $[\beta] \in \mathcal{PB}_n$, es fácil ver que $\varphi(\beta)$ es un lazo con punto base $P_0$, de ésto, la asignación es correcta. Notemos que dos trenzas puras $\alpha$ y $\theta$ son homotópicas sí y solo si $\varphi(\alpha)$ y $\varphi(\theta)$ son homotópicas, esto es, $[\alpha] = [\theta]$ si y sólo si $[\varphi(\alpha)] = [\varphi(\theta)]$. De ésto, $\psi$ está bien definida y es inyectiva. Además, $\psi$ es homomorfismo de grupos. Ahora, sea $\eta \in \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0)$, sabemos que

$$\begin{array}{rccc} \eta: & [0,1] & \to & \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0) \\ & t & \mapsto & (a_1(t), \ldots, a_n(t)), \end{array}$$

donde $a_i : [0,1] \to \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$. Notemos que la trenza $\tilde{\alpha}$ de arcos $\tilde{a_1}, \ldots, \tilde{a_n}$, donde el arco $\tilde{a}_i$ se encuentra en $[0,1]$ y es homotópico a $a_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, cumple que $\psi(\tilde{\alpha}) = \eta$. Así, $\psi$ es sobreyectiva. Por tanto,

$$\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0) \cong \mathcal{PB}_n.$$

■

**Lema 34 (Lema de los cinco)** *Consideremos el siguiente diagrama de grupos y homomorfismos.*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r, "i_4"] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"'] \\ B_1 \arrow[r, "j_1"'] & B_2 \arrow[r, "j_2"'] & B_3 \arrow[r, "j_3"'] & B_4 \arrow[r, "j_4"'] & B_5 \end{tikzcd}$$

*Si cada fila es exacta, cada cuadrado conmuta, $f_1$ es un epimorfismo, $f_2$ y $f_4$ son isomorfismos y $f_5$ es un monomorfisma, entonces, $f_3$ es un isomorfismo.*

**Proposición 35** *Sea $P_0 = (1, 2, \ldots, n) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$, se tiene que*

$$\pi_1(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}), [P_0]) = B_n,$$

*donde $[P_0]$ está dada por las permutaciones de las coordenadas de $P_0$.*

**Demostración.** Consideremos la asignación

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\psi}: & \mathcal{B}_n & \to & \pi_1(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}), [P_0]) \\ & [\alpha] & \mapsto & [\varphi(\alpha)] \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}(\alpha): & [0,1] & \to & \pi_1(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}), [P_0]) \\ & t & \mapsto & (a_1(t), \ldots, a_n(t)), \end{array}$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ son los $n$ arcos que conforman a $\alpha$.

Es fácil ver que $\tilde{\psi}(\beta)$ es un lazo con punto base $[P_0]$, para toda trenza $\beta \in B_n$; además, $\tilde{\psi}$ es un homomorfismo de grupos y el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{PB}_n \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & B_n \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\psi}"'] & S_n \arrow[r] \arrow[d, "Id"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0) \arrow[r] & \pi_1(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}), [P_0]) \arrow[r] & S_n \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Notemos que tanto la primera como la segunda sucesión son exactas; ahora, por el lema de los cinco, tenemos que $\tilde{\psi}$ es un isomorfismo. Así,

$$\pi_1(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}), P_0) \cong \mathcal{PB}_n.$$

■

# Conclusión

Notemos que le hemos asignado, a lo que empezamos definiendo como un ente puramente geométrico, una estructura algebraica, una presentación y una definición equivalente mediante grupo fundamental. Ésto parace hacer necesario destacar la gran variedad de herramientas matemáticas, de diversas áreas, con las cuales se puede estudiar el grupo de trenzas, lo cual hace aún más interesante su estudio.

Para finalizar, me gustaría agradecer al Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña por la oportunidad de trabajar bajo su tutela y al Programa para un Avance Global e Integrado de la Matemática Mexicana, proyecto FORDECyT clave 265667, sin el cual este trabajo no hubiese sido posible.

# References

[Cha05] Fernando Chamizo. *5. Grupo Fundamental.* UAM, 2004-2005.

[Cis01] José Luis Cisneros. Grupo fundamental y espacios cubrientes. *Escuela de Verano en Topología y Geometría*, 2001.

[Gla12] Daniel Glasscock. What is a braid group? 2012.

[Gon11] Juan González. Basic results on braid groups. *Annales Matheématiques Blaise Pascal*, 18, 2011.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Jac04] Nicholas Jackson. Notes on braid groups. 2004.

[Mas91] William Massey. *A basic course in algebraic topology.* Springer Verlag New York Inc., 1991.

[Nav16] Miguel Navarro. Trenzas y nudos. Master's thesis, 2016.

[Par07] Luis Paris. Braid groups and artin groups. 2007.

[Rot03] Joseph Rotman. *Advanced Modern Algebra.* Prentice Hall, 2003.