Una introducción a la teoría de singularidades

Luis Fernando Altamirano Fernández
Asesor: José Luis Cisneros-Molina

Segundo Verano de Investigación

Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas UNAM

Agradezco al Programa para un Avance Global e Integrado de la Matemática Mexicana, proyecto FORDECyT clave 265667.

Introducción

En ciencias como la física, matemáticas e incluso en economía, existen objetos llamados singularidades, que se caracterizan por tener propiedadades completamente diferentes a su entorno y que sólo pueden ser estudiadas indirectamente.
Con esta idea se comenzó el estudio de las singularidades en matemáticas, donde éstas aparecen como ceros de familias de polinomios, o bien como puntos críticos de una función dada.
Resulta que una singularidad aislada tiene asociado un invariante topológico conocido como aureola, más aún, que el comportamiento cerca de una singularidad es similar al de un cono. También que para una clase particular de singularidades la aureola es en realidad un nudo enredado en un toro.
Estos resultados y el teorema de fibración de Milnor, el cual nos da las condiciones suficientes para fibrar la circunferencia unitaria respecto al complemento de dicha aureola en una esfera, se presentan en este trabajo que surge como un intento de estudiar lo extraordinario.

1. Conjuntos algebraicos

Sea Φ el campo de los números reales o complejos. Denotamos por Φ^m al conjunto de las m-tuplas con coeficientes en Φ y a $\Phi[x_1, x_2, ..., x_m]$ al conjunto de polinomios en m variables con coeficientes en Φ.

Definición 1. A un conjunto $V \subset \Phi^m$ lo llamaremos **algebraico** si existe $\Lambda \subset \Phi[x_1, x_2, ..., x_m]$ tal que $V = \{p \in V | \forall f \in \Lambda : f(p) = 0\}$ y a esto último lo denotamos por $V = Z(\Lambda)$.

Los conjuntos algebraicos por sí mismos definen una topología sobre Φ^m donde un conjunto es abierto si es complemento de un conjunto algebraico. Esta topología se conoce como **topología de Zariski**.
Dado V un conjunto algebraico, nos fijamos en la familia de polinomios en m variables que se anulan en V y lo llamamos $I(V)$, es decir,

$$I(V) = \{f \in \Phi[x_1, x_2, ..., x_m] | \forall p \in V : f(p) = 0\}.$$

Teorema 1. *$I(V)$ es un ideal en $\Phi[x_1, x_2, ..., x_m]$.*

Demostración. Veamos que $I(V)$ es un subgrupo aditivo, que es cerrado bajo la multiplicación por izquierda.

i) Sean $f, g \in I(V)$, entonces si $p \in V$, $(f + g)(p) = f(p) + g(p) = 0$, es decir, $f + g \in I(V)$. Por otro lado, para $f \in I(V)$ se cumple que: $(-f)(p) = -f(p) = 0$ para cada $p \in V$. Luego, $I(V)$ es un subgrupo aditivo.

ii) Sean $f \in I(V)$, $g \in \Phi[x_1, x_2, ..., x_m]$ y $p \in V$, entonces $(gf)(p) = g(p)f(p) = 0$, así $gf \in I(V)$.

□

Recordemos que si A es un anillo, las siguientes son equivalentes:

a) Toda sucesión creciente de ideales $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de A es estacionaria.

b) Todo ideal I de A es finitamente generado.

Y que si se cumple alguna de ellas, decimos que A es Noetheriano.

Teorema 2 ([3])**.** *Si A es un anillo que es Noetheriano, entonces $A[x_1, ..., A_m]$ es Noetheriano.*

Como Φ es un campo, los únicos ideales son Φ y $\{0\}$. De modo que Φ es Noetheriano. Así, $\Phi[x_1, x_2, ..., x_m]$ también lo es, de modo que, $I(V)$ está generado por una cantidad finita de polinomios, digamos $I(V) =< \{f_1, f_2, ..., f_k\} >$. Sea $p \in V$ y consideremos la siguiente matriz, $J_p = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p))$. Ahora, calculamos todos los rangos de las matrices J_p para todo $p \in V$ y llamamos κ al mayor de todos.

Definición 2. Sea $p \in V$, decimos que p es un punto **singular** si y sólo si J_p tiene rango menor que κ. De lo contrario, decimos que p es un punto **regular**. Y denotamos por $\Sigma(V)$ al conjunto de todos los puntos singulares de V.

Proposición 1. Sea V un conjunto algebraico, entonces $\Sigma(V)$ es un subconjunto algebraico propio de V.

Demostración. Sea $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ un conjunto de generadores de $I(V)$.
Sea $D(V) := \{det(M)|M$ es submatriz de $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ de tamaño κ x $\kappa\}$. Notemos que ésta es una familia de polinomios con coeficientes en Φ. Además los puntos singulares de V son exactamente aquellos puntos para los cuales $det(M) = 0$. De modo que, $\Sigma(V) = V \cap Z(D(V))$. Como la intersección de dos conjuntos algebraicos es algebraico (la intersección de dos cerrados es un cerrado), $\Sigma(V)$ es algebraico. Además como existe un punto $p \in V$ en el cual la matriz $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p))$ alcanza su rango máximo κ, tenemos que $\Sigma(V)$ es un subconjunto propio de V. □

Definición 3. Si un conjunto algebraico $V \subset \Phi^m$ no se puede expresar como unión de dos subconjuntos algebraicos propios, decimos que V es una **variedad algebraica**.

2. Variedades Diferenciables

Consideremos, en general, una variedad topológica k-dimensional M, es decir, un espacio topológico que es Hausdorff, segundo numerable en el que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de algún $\mathbb{R}^k$. Esto es, existe una familia $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}_{\lambda \in L}$, la cual llamaremos **atlas** y a las parejas $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ **cartas**, tal que:

1. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ es una cubierta abierta de M.

2. Cada ϕ_λ es un homeomorfismo de U_λ a algún abierto V_λ de $\mathbb{R}^k$.

Tomemos dos abiertos U_λ, U_η, tales que $U_\lambda \cap U_\eta \neq \emptyset$, y sus cartas correspondientes. La función $\phi_{\lambda\eta} : \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\eta) \to \phi_\eta(U_\lambda \cap U_\eta)$ tal que para cada $q \in \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\eta), \phi_{\lambda\eta}(q) = \phi_\eta \circ \phi_\lambda^{-1}(q)$ llevará por nombre **función de transición**. Diremos también que un atlas es **diferenciable** si todas sus funciones transición son derivables infinitamente. A un atlas diferenciable que es maximal (respecto a la inclusión) le lamaremos **estructura diferenciable**.

Definición 4. Una **variedad diferenciable** es una variedad topológica que cuenta con una estructura diferenciable.

Ejemplo 1. Sean n un número natural, $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} | ||p|| = 1\}$ y $U_{k,0} = \{p \in \mathbb{S}^n | p_k > 0, p = (p_1, ...p_{n+1})\}$, $U_{k,1} = \{p \in \mathbb{S}^n | p_k < 0, p = (p_1, ...p_{n+1})\}$. Note que para cada $k \in \{1, 2, ..., n+1\}$, $U_{k,0}$ y $U_{k,1}$ son abiertos en $\mathbb{S}^n$ y que juntos forman una cubierta abierta de $\mathbb{S}^n$. También tenemos que $\mathbb{S}^n$ es Hausdorff y segundo numerable al ser un subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Ahora sean, $\varphi_{k,i} : U_{k,i} \to E^n := \{p \in \mathbb{R}^n | ||p|| < 1\}$ tal que $\varphi(p_1, p_2, ..., p_{n+1}) = (p_1, p_2, ..., p_{k-1}, p_{k+1}, ..., p_n)$. La inversa de estas funciones asocia a una n-tupla a la misma sólo que en la k-ésima coordenada le asocia la raíz de la diferencia de 1 y la suma de los cuadrados de dicha n-tupla, y dependiendo de i la raíz se toma positiva o negativa. Estas funciones son difeomorfismos, lo que prueba que $\mathbb{S}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión n.

Definición 5. Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una función continua. Decimos que f es **derivable** en un punto $p \in M$ si y sólo si para toda carta (U, ϕ) tal que $p \in U$, y toda carta (V, ψ) con $f(p) \in V$, la composición: $\psi \circ f|_{U \cap f^{-1}(V)} \circ \phi^{-1}|_{\phi(U \cap f^{-1}(V))}$ es derivable en $\phi(p)$.

Ahora, consideremos M, N variedades diferenciables contenidas en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente y $f : M \to N$ una función derivable y $p \in M$. Un vector v en $\mathbb{R}^m$ es un **vector tangente** a M en p si y sólo si existe una curva derivable $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ tal que $0 \in I, \alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.
Definimos al **plano tangente** a M en p como el conjunto de todos los vectores tangentes a M en p, al cual denotamos por T_pM.
Ahora supongamos que tenemos un vector v en T_pM. Sea α una curva como en la definición de vector tangente, y definamos $w_v := (f \circ \alpha)'(0)$ el cual es un vector en $T_{f(p)}N$. La función que manda a v en w_v la llamamos **diferencial** de f en p y la denotamos por df_p.

Note que df_p está bien definida. En efecto si tomamos otra curva $\beta : I \subset \mathbb{R} \to M$ que satisfaga que $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = v$ entonces: $(f \circ \beta)'(0) = f_p'(\beta'(0)) = f_p'(v) = w_v$. Por otro lado, como f_p' es una transformación lineal entonces df_p también es una transformación lineal. Notemos ahora que si f es un difeomorfismo entonces df_p es biyectiva, en efecto, $(df_p)^{-1} = df^{-1}_{f(p)}$. Más aún, $df^{-1}_{f(p)}$ es lineal. Para completar esta construcción enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sean M una variedad diferenciable k-dimensional contenida en $\mathbb{R}^m$ y $p \in M$, entonces T_pM es un espacio vectorial de dimensión k.*

Demostración. Como $p \in M$, existe una carta (U, ϕ) tal que ϕ es un difeomorfismo de U a un abierto de $\mathbb{R}^k$. Ahora, sea $v \in T_pM$ y note que $d\phi_p(v) \in \mathbb{R}^k$. Por otro lado, si $v \in \mathbb{R}^k$, claramente $d\phi^{-1}_{\phi(p)}(v) \in T_pM$. Luego, T_pM es la imagen bajo una transformación lineal de un espacio vectorial. Por lo tanto, T_pM es un espacio vectorial de dimensión k ya que $d\phi_p$ es biyectiva. □

Como consecuencia de todo lo mencionado anteriormente, si tenemos dos variedades diferenciables M, N contenidas en espacios euclídeos (no necesariamente los mismos), un punto $p \in M$ y f un difeomorfismo entre ellas, entonces tenemos automáticamente un isomorfismo entre espacios vectoriales, más precisamente entre T_pM y $T_{f(p)}N$ mediante df_p.
Por otro lado, la diferencial de una función en un punto también puede ayudarnos a clasificar los puntos de una variedad diferenciable como sigue. Siguiendo con la notación usada, si $p \in M$ es tal que df_p es sobreyectiva entonces diremos que p es un **punto regular** y si $q \in N$ es tal que todos los puntos de $f^{-1}(q)$ son regulares, decimos que q es un **valor regular**. De otro modo, llamamos a p punto crítico y a q valor crítico. A continuación un resultado, del cual omitiremos su demostración, que ayuda a verificar si una variedad es diferenciable.

Teorema 4 ([4]). *Sean M, N variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente, con $n \leq m$ y $f : M \to N$ derivable. Si $q \in N$ es un valor regular entonces $f^{-1}(q)$ es una variedad diferenciable de dimensión $m - n$.*

3. Aureola de una singularidad

En esta sección se pretende mostrar un resultado importante acerca de las singularidades aisladas. Y para ello, mostraremos unas definiciones y teoremas que servirán para esbozar una prueba de dicho resultado.
Sean M, N variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. Definimos el **haz tangente** de M, denotado por TM como

$$TM := \{(x, v) | x \in M, v \in T_x M\}$$

y decimos que X es un **campo vectorial** en M si y sólo si es una función derivable en M y $\pi_M \circ X = Id_M$, donde π_M es la proyección de la primera coordenada. Ahora, si tenemos una función derivable entre ellas, digamos f. Definimos la función $Df : TM \to TN$ dada por $Df(x, u) = (f(x), df_x(u))$. Claramente si f es un difeomorfismo, la inversa de Df está definida.
Ahora dado un campo vectorial X en M y f un difeomorfismo de M a N, definimos el **push-forward**, denotado por f_*X, de X por f como sigue: $f_*X = Df \circ X \circ f^{-1}$. Y dado un campo vectorial Y en N definimos su **pull-back**, denotado por f^*, como: $f^* = (Df)^{-1} \circ Y \circ f$.
Diremos también que una familia de funciones no nulas $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de M al intervalo $[0, 1]$ es una **partición de la unidad** si:

1. La familia $\{S_\lambda\}_{\lambda \in L}$ es localmente finita, donde cada $S_\lambda := Cl\{p \in M | \varphi_\lambda(p) \neq 0\}$ y Cl denota la cerradura del conjunto, esto es, para cada $p \in M$ hay un abierto U en M tal que U intersecta a sólo una cantidad finita de conjuntos S_λ.
2. $\forall p \in M : \sum_{\lambda \in L} \varphi_\lambda(p) = 1$.

Además, diremos que ésta partición de la unidad está subordinada a una cubierta abierta $\{U_\lambda\}$ si cada ϕ_λ se anula en $M \setminus U_\lambda$.

Teorema 5 ([4])**.** *Sea M una variedad diferenciable y $\{U_\lambda\}$ una cubierta abierta de M entonces existe una partición de la unidad subordinada a $\{U_\lambda\}$.*

Ahora, consideremos un atlas $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}_{\lambda \in L}$ de M en $\mathbb{R}^m$ y $\{\varphi_\lambda\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_\lambda\}$. Cada U_λ tiene asociado un abierto V_λ, digamos en $\mathbb{R}^k$ tal que $\phi_\lambda(U_\lambda) = V_\lambda$. Y supongamos que hemos construido un campo vectorial en cada V_λ, digamos v_λ.

Teorema 6 ([4])**.** *Sea v definido como: $v(p) = \sum_{\lambda \in L} \varphi_\lambda \phi_\lambda^* v_\lambda(p)$, entonces v es un campo vectorial en M.*

Ahora, mostremos la relación que existe entre los puntos de vista algebraico y diferencial que se han planteado hasta el momento.
Siguiendo con la notación empleada en la definición 2.

Teorema 7 ([7])**.** *Sea V un conjunto algebraico entonces $V \setminus \Sigma(V)$ es una variedad diferenciable de dimensión $m - \kappa$ sobre Φ.*

Y a continuación otro teorema que resultará de gran importancia.

Teorema 8 ([7])**.** *Dados dos conjuntos algebraicos W, V tal que $W \subset V$ en Φ^m, $V \setminus W$ tiene un número finito de componentes conexas.*

Ahora bien, como Φ es un campo, recordemos que toda sucesión creciente de ideales en $\Phi[x_1, x_2, ..., x_m]$ es estacionaria, se sigue que toda sucesión decreciente de conjuntos algebraicos es estacionaria. A partir de un conjunto algebraico V obtenemos una sucesión decreciente a partir de los conjuntos singulares y como dicha sucesión se estaciona, aplicamos los teoremas 7 y 8 para poder decir que V se puede mirar como la unión finita disjunta de variedades diferenciables con un número finito de componentes conexas.
Ahora consideramos una función polinomial, h, en $\Phi[x_1, x_2, ..., x_m]$ y renombramos $M := V \setminus \Sigma(V)$. Al separar a V entre puntos singulares, regulares y críticos o no de $h|_M$, vemos que los puntos críticos de $h|_M$ son exactamente aquellos puntos en M donde la matriz que se obtiene de colocar en la primera fila a $(\frac{\partial h}{\partial x_i})$ y en las siguientes a la matriz $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ tiene rango menor igual a κ.
Por lo anterior, podemos ver que el conjunto de puntos críticos de $h|_M$ es la diferencia de dos conjuntos algebraicos y por lo tanto tiene un número finito de componentes conexas. Más aún, un punto crítico de $h|_M$ hace que la diferencial de h en ese punto no sea suprayectiva y por el teorema de la dimensión, tenemos que ésta debe ser la función cero. Un teorema nos afirma que ésta función debe ser constante por componentes conexas. Y como el conjunto de puntos críticos de $h|_M$ tiene un número finito de ellas, ésta función toma un número finito de valores críticos.
Supongamos ahora que Φ es el campo de los números reales, lo cual puede hacerse ya que $\mathbb{C}^m$ lo podemos ver como $\mathbb{R}^{2m}$.
Tomemos ahora un punto $p \in V$ que sea regular o singular pero aislado y consideremos la función distancia a p elevada al cuadrado, r. Ésta es una función polinomial en $\mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_m]$, luego: $r|_M$ tiene un número finito de valores críticos. Sea $\epsilon > 0$ tal que ϵ^2 es menor que cualquier valor crítico de $r|_M$ y tal que $|r^{-1}(\epsilon^2) \cap \Sigma(V)| \leq 1$. Luego, ϵ^2 es un valor regular $r|_M$, por lo tanto por el teorema 4, $r^{-1}(\epsilon^2)$ es una variedad diferenciable de dimensión $m - 1$. Denotando como S_ϵ a la esfera con centro en p, tenemos que $r^{-1}(\epsilon^2) = S_\epsilon$. Por lo tanto, $K_\epsilon := S_\epsilon \cap V$ es una variedad diferenciable. Si p es un punto singular, por el momento diremos que K_ϵ es una **aureola de la singularidad** p. A continuación veremos que todas las aureolas son las mismas salvo homeomorfismo.
Recordemos que en general el **cono** sobre un espacio topológico X se define como: $Cono(X) = X \times [0, 1]/R$ con R la relación de equivalencia que identifica como puntos iguales a $(x, 1)$ y $(y, 1)$ para cada $x, y \in X$. Para nuestro propósito esta definición de cono coincide con el conjunto de líneas desde un punto a el espacio X.

Teorema 9. *Sea V un conjunto algebraico y K_ϵ como antes, entonces $V \cap B_\epsilon$ es homeomorfo al $Cono(K_\epsilon)$.*

Demostración. Recordamos que ϵ es tal que B_ϵ no tiene puntos críticos de $r|_M$ y a lo más tiene una singularidad, posiblemente p. Se construirá un campo vectorial $v_\lambda(x)$ para una vecindad U_λ de cada punto p_λ en el disco $B_\epsilon \setminus \{p\}$, de tal manera que:

C.1 $\langle v_\lambda(x), x-p\rangle > 0$, esto significa que el vector $v_\lambda(x)$ apunta hacia afuera de p.

C.2 Si $x \in M$ entonces $v_\lambda(x)$ es tangente a M.

Ahora, si $p_\lambda \in B_\epsilon \setminus M$, elegimos al vector $x-p$ para cada $x \in U_\lambda$ con U_λ una vecindad de p_λ contenida en $B_\epsilon \setminus V$.
Si $p_\lambda \in M$, tomamos una carta de p_λ, digamos $(U'_\lambda, \phi_\lambda)$ y su respectivo abierto V_λ en $\mathbb{R}^{m-\kappa}$, esto porque M es una variedad diferenciable de dimensión $m-\kappa$. Note que podemos encajar a $\mathbb{R}^{m-\kappa}$ en $\mathbb{R}^m$ mediante una función que deja las primeras κ coordenadas cero. Podemos decir entonces que V_λ está contenido en $\mathbb{R}^m$ y que mediante una traslación $\phi_\lambda(p_\lambda) = 0$. Consideramos ahora la inversa de ϕ_λ la cual denotamos por ψ_λ y suponemos que esta dada por: $\psi_\lambda = (x_1, x_2, ..., x_m)$ donde las x_i son funciones de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}$. Así que, valuar r en algún punto de U' equivale a valuar r en una m-tupla cuyas primeras κ coordenadas son cero. Como $d(r\circ\psi_\lambda)_0 = dr_{p_\lambda} \circ d(\psi_\lambda)_0$ y esta última es la composición de funciones sobreyectivas, tenemos que 0 es un punto regular de $r \circ \psi_\lambda$. Por lo tanto, existe un h entre $\kappa+1$ y m tal que $\frac{\partial r}{\partial u_h}(p_\lambda) \neq 0$, la cual al ser continua nos da una vecindad de p_λ , digamos $U_\lambda \subset U'_\lambda$ donde para cada $x \in U_\lambda$, $\frac{\partial r}{\partial u_h}(x) \neq 0$.
Dado $x \in U_\lambda$, supongamos $\phi_\lambda(x) = (0, 0, ..., y_{\kappa+1}, ...y_m)$.
Sea α_x una curva que pasa por x dada por $\alpha_x(u_h) = (x_1(0, ..., y_{\kappa+1}, ..., y_h + u_h, ...y_m), ..., x_m(0, ..., y_{\kappa+1}, ..., y_h+u_h, ...y_m))$, la cual por construcción está contenida en M y además $\alpha'_x(0) =^+_- (\frac{\partial x_1}{\partial u_h}(x), ..., \frac{\partial x_m}{\partial u_h}(x))$. Definimos, $v_\lambda(x) = \alpha'_x(0)$.
Si $\frac{\partial r}{\partial u_h} > 0$ en U_λ, tomamos el signo positivo de $\alpha'_x(0)$. Si ocurre lo contrario, tomamos el signo negativo.
Note que, $v_\lambda(x)$ es tangente a M en x para cada $x \in U_\lambda$ y además:

$$2\langle v_\lambda(x), x-p\rangle =^+_- \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_h}(x) =^+_- \frac{\partial r}{\partial u_h}(x) > 0.$$

Para la cubierta $\{U_\lambda\}_{\lambda\in L}$, por el teorema 5 existe una partición de la unidad $\{\phi_\lambda\}_{\lambda\in L}$ subordinada a ella. Y por el teorema 6, podemos pegar todos estos campos vectoriales, al cual le llamaremos v, el cual seguirá cumpliendo las propiedades [C.1] y [C.2]. Ahora definimos el campo w como $w(x) = \frac{v(x)}{2<v(x), x-p>}$.
Para cada $x \in B_\epsilon \setminus \{p\}$. Buscamos una curva diferenciable s definida en algún intervalo abierto tal que $s(t_0) = x$ y $s'(t_0) = w(x)$.
Aplicando la regla de la cadena, notamos que si s(t)=x,

$$(r\circ s)'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial r}{\partial x_i} w_i(x) = 2\langle x-p, w(x)\rangle = 1.$$

Realizando un cambio de variable, podemos suponer que $r \circ s = t$, es decir, $|s(t)-p| = \sqrt{t}$.

Queremos ahora extender a s al intervalo $(0, \epsilon^2]$ para cubrir, ya con todas las curvas, a $B_\epsilon \setminus \{p\}$.

Lema 1. *La solución s puede extenderse a* $(0, \epsilon^2]$.

Demostración. Supongamos que construimos el campo vectorial w en un abierto que contiene a $B_\epsilon \setminus \{p\}$ y que tenemos una familia finita de intervalos donde s existe, la cual tiene como cota superior a un intervalo de la forma (α', ϵ^2). Por el lema de Zorn, sea (α', β') un intervalo maximal donde s existe.
Suponga que $\beta' \leq \epsilon^2$. Para t entre α' y β' la sucesión $\{s(t)\}$ está contenida en B_ϵ, el cual es acotado, luego si $t \to \beta'$, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, hay un punto de acumulación x' de la sucesión anterior. Y por la continuidad de la función r, tenemos que $r(x') = \beta'$. Por lo tanto, $x' \in B_\epsilon \setminus \{p\}$.
Por el teorema de existencia y unicidad [1], al tomar x'' en una vecindad de x' y a t'' en un intervalo I que tenga a β', para la pareja (t'', x'') existe una única curva solución u tal que $u(t) = x$ y $u(t'') = x''$, la cual además, es infinitamente derivable.
Tomando $t'' \in (\alpha', \beta') \cap I$, como $x'' = s(t)$, por el teorema de unicidad global, tenemos que $s(t) = u(t)$ para cada $t \in (\alpha', \beta') \cap I$.
Y considerando la unión de s y u, la cual está definida en $(\alpha', \beta') \cup I$, tenemos una extensión de s lo cual contradice la maximalidad de (α', β'). Así, $\epsilon < \beta'$. Como $\alpha' \geq 0$, realizando un argumento similar al anterior obtenemos que $\alpha' = 0$. $\square$

Llamemos s^* a la extensión de s, la cual esta definida en $(0, \epsilon^2]$. Nuevamente, por el teorema de unicidad global, la condición inicial $s^*(\epsilon^2)$ determina unívocamente a la curva s^*.
Definimos $H : S_\epsilon \times (0, \epsilon^2] \to B_\epsilon \setminus \{p\}$ tal que $H(a, t) = s^*(t)$, donde s^* es la curva solución determinada por la condición inicial $s^*(\epsilon^2)$.
Por la unicidad de s^*, tenemos que H es una función. Y como está definida en términos de s^*, la cual es continua, tenemos que H es continua.
Ahora si tenemos dos elementos $(a, t), (a', t') \in S_\epsilon \times (0, \epsilon^2]$ y $a \neq a'$ entonces las curvas s^* correspondientes son distintas y éstas no pueden cruzarse ya que esto implicaría que son iguales, ahora, si $t \neq t'$ y tuvieramos la misma curva asociada diríamos que la curva se autointersecta, lo cual no puede ocurrir ya que la derivada en un punto coincide con un vector que apunta hacia afuera de p. Concluimos entonces que $H(a, t) \neq H(a', t')$, por lo tanto H es inyectiva.
Si tomamos un punto q en $B_\epsilon \setminus \{p\}$, una curva s^* debe pasar por el punto ya que hay un campo vectorial definido alli, luego si $a = s^*(\epsilon^2)$, $H(a, t) = q$. Por lo tanto, H es sobreyectiva.
De modo que, $S_\epsilon \times (0, \epsilon^2]$ es homeomorfo a $B_\epsilon \setminus \{p\}$. Ahora, si nos restringimos a puntos en $M \cap B_\epsilon$, el que haya un vector tangente a M en dicho punto, como lo es w, implica que su curva asociada s^* está contenida en M. De modo que, $S_\epsilon \cap V \times (0, \epsilon^2]$ es homeomorfo a $M \cap B_\epsilon$.
Sea F la función de $Cono(K_\epsilon)$ a $V \cap B_\epsilon$ tal que: $F(ta + (1-t)p) = S(a, t\epsilon^2)$ si $t \in (0, 1]$ y que valga p si $t = 0$, la cual es un homeomorfismo ya que si $t \to 0$ entonces $S(a, t\epsilon^2) \to p$. Por lo tanto, $V \cap B_\epsilon$ es homeomorfo a $Cono(K_\epsilon)$. $\square$

De esto, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1. *Sea ϵ como antes, entonces para cada δ menor a ϵ, la aureola de p K_δ es homeomorfa a K_ϵ.*

Ahora podemos decir que una singularidad aislada p, tiene sólo una aureola asociada salvo homeomorfismo.

Ejemplo 2. Consideremos el siguiente polinomio de entradas complejas

$$f(z_1, z_2) = z_1^p + z_2^q$$

con p y q enteros positivos coprimos y sean $V = f^{-1}(0)$ y ϵ positivo suficientemente pequeño. Consideramos el conjunto $K := V \cap S_\epsilon$ y un punto cualquiera (z_1, z_2) allí. Se cumple entonces que $|z_1|^2 + |z_2|^2 = \epsilon^2$ y $|z_1|^p = |z_2|^q$.
Despejando se tiene que $|z_2|^{\frac{2q}{p}} + |z_2|^2 - \epsilon^2 = 0$. Note el polinomio real $g(u) = u^{\frac{q}{p}} + u - \epsilon^2$ tiene como derivada a $g'(u) = \frac{q}{p}u^{\frac{q}{p}-1} + 1$ en $(0, \epsilon^2)$. Por lo tanto, en ese intervalo, g es estrictamente creciente. Por el teorema del valor intermedio en $(0, \epsilon^2)$, g tiene una raíz real única, digamos τ. Entonces, $|z_2| = \tau$ y $|z_1| = [\epsilon^2 - \tau^2]^{\frac{1}{2}}$, o bien, $|z_2| = \tau$ y $|z_1| = \xi$ con $\xi := [\epsilon^2 - \tau^2]^{\frac{1}{2}}$. Luego, K esta contenido en un toro generado por las circunferencias centradas en el origen de radio ξ y τ.
Como $z_1^p = -z_2^q$, tenemos que p argz_1=$-q$ argz_2, o bien, $p$arg$z_1 + \pi = q$argz_2. Despejando y haciendo $t = p\text{arg}z_1$, tenemos que todos los puntos de K se pueden describir como la imagen de una función φ definida en todo $\mathbb{R}$ tal que $\varphi(t) = (|\xi|e^{it/p}, |\tau|e^{(it/q)+(i\pi/q)})$. Notamos que basta tomar el intervalo $[0, 2\pi pq]$ ya que si tomamos al 0 como punto de partida entonces regresamos al mismo punto en el mínimo común múltiplo de p y q, que por ser coprimos es pq. Haciendo $t = pq\theta$, la parametrización queda $(|\xi|e^{iq\theta}, |\tau|e^{ip\theta+(i\pi/q)})$ con θ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Nuevamente usando que p y q son coprimos, tenemos que K es un nudo tórico de tipo (p, q), es decir, es un nudo que le da q vueltas al meridiano del toro y p vueltas a la longitud.

4. Teorema de fibración

A continuación, daremos un esbozo de la demostración del **teorema de fibración de Milnor** que se presenta en [5].

Definición 6. Sean E, B espacios Hausdorff, $p : E \to B$ una función continua y suprayectiva y un espacio $F := p^{-1}(b)$ para algún $b \in B$. Decimos que $H := (E, B, p, F)$ es un **haz fibrado** si para cada $x \in B$ existe una vecindad de x, $U_x \subset B$ y un homeomorfismo $\varphi_x : U_x \times F \to p^{-1}(U_x)$ tal que $p \circ \varphi_x = \pi_1|_{U_x \times F}$ donde π_1 es la proyección en la primera coordenada. A p le llamaremos función proyección de H.

Consideremos un polinomio en m variables complejas, f, que se anula en el origen. Definimos

$$\nabla f := (\overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}}, ..., \overline{\frac{\partial f}{\partial z_m}}).$$

Si consideramos el producto hermitiano en $\mathbb{C}^m$ definido como $\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{m} z_i \overline{w_i}$ con $z = (z_1, ..., z_m), w = (w_1, ..., w_m)$, por la regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{df(p(t))}{dt} = \langle \frac{dp}{dt}, \nabla f\rangle$$

para una función p definida en un intervalo de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^m$.
Tomamos $V := f^{-1}(0)$, S_ϵ la esfera centrada en el origen de radio ϵ, con ϵ suficientemente pequeño, K como antes y $\phi : S_\epsilon \setminus K \to S^1$ tal que $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$.
Nuestro objetivo será ver que ϕ es la función proyección de un haz fibrado sobre $\mathbb{S}^1$ (la circunferencia unitaria).
Fijémonos en la función logaritmo localmente y denotémosla como log. Por la regla de la cadena:

$$\nabla \text{log} f(z) = \frac{\nabla f(z)}{\overline{f(z)}}.$$

Además, si $\phi(z) = e^{i\theta(z)}$ entonces $\theta(z) = \Re(-i\text{log}f(z))$, tomando una curva p con entradas reales que pase por z, al derivar tenemos:

$$\frac{d\theta(p(t))}{dt} = \Re\langle \frac{dp}{dt}, i\nabla \text{log} f(p(t))\rangle$$

es decir, la derivada de θ en la dirección $v = \frac{dp}{dt}$ es: $\langle v, i\nabla \text{log} f\rangle$.
También note que,

$$\frac{d\text{log}|f(p(t))|}{dt} = \Re\langle \frac{dp}{dt}, \nabla \text{log} f(p(t))\rangle.$$

Ahora, $z \in S_\epsilon \setminus K$ es un punto crítico de ϕ, con $\phi(z) = e^{i\theta}$ si y sólo si

$$T_z(S_\epsilon \setminus K) = \text{Ker} d_z\phi = T_z(\phi^{-1}(e^{i\theta})).$$

Por lo tanto, si $i\nabla \log f(z)$ es múltiplo real de z entonces $i\nabla \log f(z)$ es normal en z a $\phi^{-1}(e^{i\theta}))$, de modo que $T_z(\phi^{-1}(e^{i\theta}) = T_z(S_\epsilon \setminus K)$, y como estos tienen la misma codimensión entonces z es un punto crítico de ϕ. Recíprocamente, si z es un punto crítico de ϕ, por lo mencionado anteriormente se debe cumplir que z sea un múltiplo real de $i\nabla \log f(z)$. Hemos probado pues, que los puntos críticos de ϕ son exactamente aquellos que son linealmente dependientes en $\mathbb{R}$ de $i\nabla \log f(z)$.
Ahora, presentamos los siguientes lemas, cuya demostración la podemos encontrar en [5].

Lema 2. *Sea $p : [0, \epsilon^2)$ una curva real analítica con $p(0) = 0$ tal que para cada $t > 0$, $f(p(t))$ no es cero y $\nabla \log f(p(t))$ es un múltiplo complejo $\lambda(t)p(t)$. Entonces el argumento de $\lambda(t)$ tiende a cero si $t \to 0$.*

Y el siguiente resultado conocido como **Lema de Selección de Curvas**.

Lema 3. *Sea V un conjunto algebraico en $\mathbb{R}^m$ y U un abierto en $\mathbb{R}^m$ definido por una cantidad finita de desigualdades de polinomios tal que $0 \in Cl(U \cap V)$ entonces existe una curva real analítica $p : [0, \epsilon^2) \to \mathbb{R}^m$, $p(0) = 0$ y $p(t) \in U \cap V$ para cada $t \in [0, \epsilon^2)$.*

Supongamos que para cada $\epsilon > 0$ existe $z \in (\mathbb{C}^m \cap B_\epsilon) \setminus V$ con $\nabla \log f(z) = \lambda z$ para algún λ numero complejo no cero, con $|\arg\lambda| > \frac{\pi}{4}$. Entonces, λ está en $\Re((1+i)\lambda) < 0$ o en $\Re((1-i)\lambda) < 0$. Sea W el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}^m$ tal que z y $\nabla \log f(z)$ son linealmente dependientes sobre $\mathbb{C}$. Luego las siguientes ecuaciones se cumplen para cada i, j entre 1 y m: $z_i \overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}} = z_j \overline{\frac{\partial f}{\partial z_i}}$ si y sólo si $z \in W$. Reescribiendo a z_j como $x_j + iy_j$ con x_j y y_j reales, recordando la defnción de $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ y tomando las partes reales e imaginarias de las igualdades anteriores, tenemos que a W lo definen los ceros de polinomios reales pues f es un polinomio. Por lo tanto, W es un conjunto algebraico real.
Ahora, $z \in (\mathbb{C}^m \setminus V) \cap W$ si y sólo si $\nabla f(z) = \lambda \overline{f(z)} z$ para algún número complejo λ. Por lo tanto se cumple que, $\langle \nabla f(z), \overline{f(z)} z \rangle = \lambda ||\overline{f(z)} z||^2$. Haciendo $\lambda'(z) = \langle \nabla f(z), \overline{f(z)} z \rangle$, vemos que si $z \in W$ entonces $\arg\lambda'(z) = \arg\lambda$. Nuevamente descomponiendo cada coordenada de z y usando que f es un polinomio, notamos que la función λ' es en realidad una función polinomial de variables reales.
Definimos a U_1 como el conjunto de los $z \in \mathbb{C}^m$ tales que $\Re((1+i)\lambda'(z)) < 0$ y a U_2 como aquellos que cumplen $\Re((1-i)\lambda'(z)) < 0$, los cuales son abiertos y están definidos por desigualdades de polinomios.
Como $0 \in Cl(W \cap U_1)$, o bien $0 \in Cl(W \cap U_2)$, por el lema 3, existe una curva real analítica $p : [0, \epsilon^2)$ con $p(0) = 0$ y con $p(t) \in W \cap U_1$ ó $p(t) \in W \cap U_2$ para cada $t \in [0, \epsilon^2)$. En cualquier caso por la definición de λ', $f(p(t))$ no se anula y $\nabla \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$, para $t \in [0, \epsilon^2)$. Pero además se cumple que $|\arg\lambda(t)| > \frac{\pi}{4}$, lo cual contradice el hecho de que $\arg\lambda(t) \to 0$ si $t \to 0$, es decir, el lema 2.
Ahora, si hay puntos $z \in W \setminus (V \cap W)$ tales que $|\arg\lambda'(z)| = \frac{\pi}{4}$ entonces las ecuaciones polinomiales reales $\Re((1+i)\lambda'(z))\Re((1-i)\lambda'(z)) = 0$ con $||f(z)||^2$ generan un conjunto U, con el cual se cumple que $0 \in Cl(W \cap U)$. Aplicando

nuevamente el lema 3, tenemos una curva p tal que $f(p(t))$ no es cero para t cercanos al cero, esto por la definición de U y $\nabla \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$. Como $|\arg\lambda(t)| = \frac{\pi}{4}$, nuevamente tenemos una contradicción con el lema 2.
Por todo lo dicho, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que si $z \in (\mathbb{C}^m \cap B_{\epsilon_0}) \setminus V$ entonces $\nabla \log f(z)$ y z son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$ o si $\nabla \log f(z) = \lambda z$ entonces $|\arg\lambda| < \frac{\pi}{4}$. Si ocurriera que $z \in (\mathbb{C}^m \cap B_{\epsilon_0}) \setminus V$ y $z = \lambda i \nabla \log f(z)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $|\arg\lambda i| < \frac{\pi}{4}$, lo cual es imposible. Por lo tanto, z y $i\nabla \log f(z)$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Se ha probado, en particular, lo siguiente.

Proposición 2. Para cada $\epsilon \leq \epsilon_0$, $\phi : S_\epsilon \setminus K \to \mathbb{S}^1$ no tiene puntos críticos.

Tomando $\epsilon \leq \epsilon_0$, construiremos un campo vectorial w en $S_\epsilon \setminus K$ tal que se cumplan las siguientes propiedades:

i) $\Re\langle w(z), z\rangle = 0$.

ii) $|\Re\langle w(z), \nabla \log f(z)\rangle| < 1$.

iii) $\Re\langle w(z), i\nabla \log f(z)\rangle = 1$.

La primera propiedad nos dice que w debe ser tangente a $S_\epsilon \setminus K$ en z. La segunda nos dice que $|\frac{d\log|f(p(t))|}{dt}| < 1$, de modo que $\log|f(p(t))|$ no puede tender a -∞ si t tiene a algún límite finito. La última nos dice que $\frac{d\theta(p(t))}{dt} = 1$.
Sea $z_\lambda \in \mathbb{C}^m \setminus V$. Si z_λ es linealmente independiente a $i\nabla \log f(z)$ sobre $\mathbb{C}$, el sistema $\langle v, z_\lambda\rangle = 0$, $\langle v, i\nabla \log f(z_\lambda)\rangle = 1$ tiene solución simultánea y, en este caso, v satisface las propiedades requeridas. Si z_λ y $i\nabla \log f(z_\lambda)$ son linealmente dependientes, elegimos $v = iz_\lambda$, y tenemos que $|\arg\langle v(z), i\nabla \log f(z)\rangle| < \frac{\pi}{4}$, además que se cumple la propiedad i). Pegando los campos vectoriales construidos, como en la demostración del teorema 9, mediante una partición de la unidad, tenemos un campo vectorial v en $B_{\epsilon_0} \setminus V$ tal que $v(z)$ es tangente a S_ϵ en z, el producto $\langle v(z), i\nabla \log f(z)\rangle$ no es cero y tiene argumento, en valor absoluto, menor a $\frac{\pi}{4}$.
Haciendo $w(z) = \frac{v(z)}{\Re\langle v(z), i\nabla \log f(z)\rangle}$, tenemos que w es un campo vectorial en $S_\epsilon \setminus K$ que cumple las tres propiedades enunciadas anteriormente.
Consideremos las curvas integrales, $p(t)$, asociadas al campo w. Notemos que $p(t)$ depende tanto de t como de la condición inicial $z_0 = p(0)$, esto lo denotamos por $p(t) = h_t(z_0)$. Ahora bien, cada h_t es un difeomorfismo de $S_\epsilon \setminus K$ en sí mismo.
Dado $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ y una vecindad pequeña de éste en el círculo unitario, digamos U damos una función que manda a cada $(e^{i(t+\theta)}, z) \in U \times F_\theta$ en $h_t(z)$, la cual es un homeomorfismo. Se tiene entonces lo siguiente.

Teorema 10. *Sea $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ es un polinomio que se anula en el origen y $V = f^{-1}(0)$ entonces la función $\phi : S_\epsilon \setminus K \to \mathbb{S}^1$ tal que $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$, con ϵ suficientemente pequeño, es la proyección de un haz fibrado sobre $\mathbb{S}^1$. Y para cada θ, $\phi^{-1}(e^{i\theta})$ es una variedad diferenciable de dimensión $2m-2$.*

Recordemos que dos espacios X, Y tienen el mismo tipo de homotopía si y sólo si existen funciones $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ tales que $g \circ f$ sea homotópica

a Id_X y $f \circ g$ a Id_Y.
En [5] se probó todavía que cada fibra $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$ tiene el mismo tipo de homotopía de un **bouquet** de m esferas, además de que se cumple que $Cl(F_\theta) = F_\theta \cup K$, siendo entonces K la frontera común a todas las fibras. Recordemos que un **enlace** es una unión disjunta de nudos y también que una **descomposición de libro abierto** de una variedad diferenciable M es una par (N, φ) tal que $N \subset M$ es un enlace orientado de M y $\varphi : M \setminus N \to \mathbb{S}^1$ es la proyección de un haz fibrado sobre $\mathbb{S}^1$ y cada fibra $\varphi^{-1}(e^{i\theta})$ es el interior de una variedad diferenciable compacta cuya frontera es B, las cuales llamaremos páginas del libro.
Por lo mencionado anteriormente tenemos que ϕ induce una descomposición de libro abierto de S_ϵ y las fibras de ϕ son las páginas de libro cuya frontera común es la aureola K.

Referencias

[1] D.Betounes. *Differential Equations: Theory and Applications*, segunda edición, pág. 86. Springer, 2010.

[2] J.L.Cisneros-Molina, J.Seade y J.Snoussi. *Milnor Fibrations and the Concept of d-regularity for Analytic Map Germs.* Contemporary Mathematics, vol.569, 2012.

[3] D.Cox, J. Little y D. O'Shea. *Ideals, Varieties and Algorithms*, tercera edición, página 7. Springer, 2007.

[4] J.E.Marsden, Tudor Ratiu, R.Abraham. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, tercera edición, págs. 175 y 371. Springer, 2001.

[5] J.Milnor. *Singular Points of Complex Hypersurfaces.* Princeton University Press, 1968.

[6] J.Seade. *On the Topology of Isolated Singularities in Analytic Spaces.* Birkhäuser Verlag, 2006.

[7] H.Whitney. *Elementary Structure of Real Algebraic Varieties.* Annals of Mathematics, vol.66, No.3, November 1957.