El problema de la palabra en el grupo de trenzas

Sandy Guadalupe Aguilar Rojas
Universidad Autónoma de Baja California

Asesorada por el Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña

Tercer Verano de Investigación en Metmáticas
Instituto de Matemáticas de la UNAM, Unidada Cuernavaca

Resumen

El presente trabajo es una recompilación de definiciones, resultados y notas encaminadas al entendimiento del problema de la palabra. Asi como la elaboración de la solución de dicho problema en el grupo de trenzas.

Índice

Agradecimientos

Se agradece apoyo económico para el desarrollo del presente proyecto al:

Proyecto FORDECYT 265667 "Programa para un avance global e integrado de la Matemática Mexicana".

De igual manera se le da las gracias al personal del Instituto de Matemáticas de la UNAM Unidad Cuernavaca por el apoyo dado y a mi asesor, Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña, por haberme guiado a lo largo del proyecto.

1. Preeliminares

Antes de adentrarnos en el problema de la palabra, es necesario conocer algunos concepto sobre el grupo de trenzas. Esto puesto que se procederá a dar solución al problema de la palabra en dicho grupo.

1.1. Trenzas geométricas

Comenzaremos con la defininción más geoméstrica del grupo de trenzas.

Definición 1 *Consideremos el espacio Euclideano de dimensión 3, y los planos tales que* $z = 0$ *y* $z = 1$.

Sean P_i *y* Q_i *los puntos con coordenadas* $(i, 0, 1)$ *y* $(i, 0, 0)$ *respectivamente, con* $i \in \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$.

Una trenza de n *cuerdas es un sistema de* n *arcos* $a_1, a_2, \dots, a_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ *tales que* a_i *conecta al punto* P_i *con el punto* $Q_{\pi(i)}$, *para alguna permutación* $\pi \in S_n$; *o equivalentemente, una función* $\bigcup_{i=1}^{n} [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ *. Además, debe de cumplirse lo siguiente:*

- *Cada arco* a_i *intersecta al plano* $z = t$ *una y sólo una vez, para cualquier* $t \in [0, 1]$.
- *Los arcos* $a_1, \dots, a_n$ *intersectan el plano* $z = t$ *en* n *puntos distintos para todo* $t \in [0, 1]$.

A los arcos de las trenzas se les conoce como cuerdas de la trenza, y la permutación π se conoce como permutación de la trenza. Si esta permutación es trivial, entonces se dice que es una **trenza pura**.

Definición 2 (Equivalencia de trenzas) *Dos* n*-trenzas* β_0 *y* β_1 *con la misma permutación* π *son equivalentes u homotópicas si existe una homotopía a través de las trenzas* β_t, *con permutación* π, *de* β_0 *a* β_1, *con* $t \in [0, 1]$, *es decir, existe una función* $H : [0, 1] \times \bigcup_{i=1}^{n} \to \mathbb{R}^3$ *tal que la restricción* $\{t\} \times \bigcup_{i=1}^{n} \to \mathbb{R}^3$ *es una trenza, para toda* $t \in [0, 1]$.

Denotaremos por B_n al cociente del conjunto de n-trenzas por la relación de equivalencia de trenzas. Notemos que los elementos de B_n son clases de equivalencia; además, B_n representa al conjunto de n-trenzas no equivalentes.

Al conjunto de las clases de equivalencia de trenzas puras, se le denota por $\mathcal{PB}_n$.

Dadas dos n-trenzas, α y β, podemos operarlas al unir la parte inferior de α con la superior de β y escalarlas, para obtener una una nueva trenza a la cual denotamos como $\alpha\beta$. Es fácil ver que dicha operación esta bien definida en B_n. Equivalentemente, la composición asocia a cada arco $a_i : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ de la trenza α y a cada arco $b_i : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ de la trenza β, un nuevo arco a_ib_i tal que

$$ab_i(t) = \begin{cases} a_i(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ b_i(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dado que las trenzas son sistemas de arcos, la composición de éstas se puede ver como

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

A esta operación se le llama **composición**.

Definición 3 *Una trenza elemental σ_i es la n-trenza formada por el cruce de la i-ésima cuerda sobre la $(i+1)$-ésima cuerda. Dicho cruce es el único cruce de la n-trenza, las $n-2$ cuerdas restantes son líneas paralelas. (Véase Figura 2)*

El inverso de una trenza elemental, σ_i^{-1}, es la n-trenza formada por el cruce de la $(i+1)$-ésima cuerda sobre la i-ésima cuerda. Dicho cruce es el único cruce de la n-trenza, las $n-2$ cuerdas restantes son líneas paralelas. (véase Figura 3)

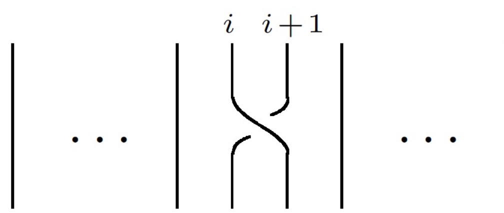


Figura 1: Trenza elemental σ_i.

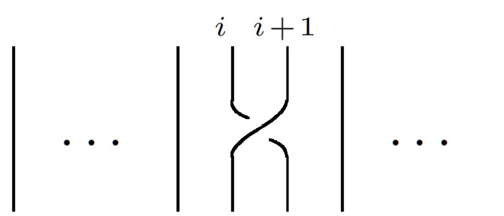


Figura 2: Inverso de trenza elemental σ_i^{-1}.

Proposición 4 *Toda n-trenza puede ser expresada como la composición de trenzas elementales.*

Proposición 5 *El conjunto B_n tiene estructura de grupo.*

1.2. Trenzas como grupo fundamental

Veamos ahora una segunda defínción del grupo de trenzas. Para esto, definamos primero el espacio de configuraciones.

Definición 6 *Una variedad de dimensión n es un espacio topológico de Haussdorff con base numerable tal que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$.*

Definición 7 *Sea M una variedad conexa de dimensión mayor o igual a 2 y sea n un entero positivo, definimos el conjunto*

$$\mathcal{F}_n(M) := \{(x_1, \dots, x_n) \in M \times \cdots \times M : x_i \neq x_j \text{ para todo } i \neq j\}.$$

A $\mathcal{F}_n(M)$ se le pude asociar la topología inducida por el producto $M \times \cdots \times M$. Al espacio $\mathcal{F}_n(M)$ se le conoce como espacio de configuraciones de un conjunto de n puntos ordenados en M.

Consideremos ahora la acción

$$\begin{array}{rccc} \mu: & S_n \times \mathcal{F}_n(M) & \longrightarrow & \mathcal{F}_n(M) \\ & (\sigma, (x_1, \dots, x_n)) & \mapsto & (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \end{array}$$

donde S_n denota al grupo simétrico de orden n sobre el conjunto $\{1, \dots, n\}$, esto es, el grupo formado por las funciones biyectivas del conjunto a sí mismo.

Definición 8 *El espacio cociente*

$$\mathcal{C}_n(M) := \mathcal{F}_n(M)/S_n,$$

definido por la acción μ, es llamado espacio de configuraciones de n puntos no ordenados en M.

Ya que conocemos al espacio de configuraciones, veamos como es que se relaciona con el grupo de trenzas mediantes estos dos resultados.

Proposición 9 *Sea $P_0 = (1, 2, \dots, n) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$, se tiene que*

$$\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0) = \mathcal{PB}_n.$$

Proposición 10 *Sea $P_0 = (1, 2, \dots, n) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$, se tiene que*

$$\pi_1(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}), [P_0]) = B_n,$$

donde $[P_0]$ está dada por las permutaciones de las coordenadas de P_0.

1.3. Presentación del grupo de trenzas

Todo grupo tiene una presentación, y el grupo de trenzas no es una excepción. Empecemos recordando la definición de presentación y posteriormente, veamos la forma que tiene una presentación del grupo de trenzas.

Definición 11 *Sea G un grupo y R un subcojunto de éste, definimos el subgrupo normalmente generado por R como*

$$\langle R \rangle^{\lhd} = \{\prod_{i \in I} g^{-1} r_i^{\epsilon_i} g : g \in G, r_i \in R, \epsilon_i = \pm 1\}.$$

Definición 12 *Una presentación de un grupo G es un par ordenado*

$$G = \langle S|R\rangle,$$

donde S es un conjunto, R es un conjunto de palabras en S y $G = F/N$, donde F es el grupo libre de base S y N es el subgrupo normal generado por R. Al conjunto X se le conoce como ***generadores*** *y al conjunto R como* ***relaciones****.*

Teorema 13 (Teorema de Artin) *Sea B_n el grupo de trenzas, tenemos que*

$$B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} | \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ si } |i-j| > 1, \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \text{ si } i = 1, \ldots, n-2\rangle$$

2. El problema de la palabra

El matemático alemán Max Dehn, inspirado en una pregunta topológica, postuló tres problemas. Dichos problemas fueron el problema de la palabra, el problema de conjugación y el problema de isomorfismos. En el presente trabajo nos enfocaremos únicamente en el problema de la palabra. En éste capítulo se darán nociones generales de dicho problema, basados en [15], [1], [5]

2.1. ¿Qué es el problema de la palabra?

Para comenzar a hablar del problema de la palabra, primero es necesario conocer la definición de algoritmo. En esta ocasión, y para fines prácticos, definiremos un **algoritmo** como un proceso dado por un número finito de instrucciones, en el cual se obtiene el resultado después de un número finito de pasos, donde en cada uno de estos no existen dudas sobre el siguiente paso a realizar.

Es necesario recordar también que dado un grupo G con presentación $\langle S|R\rangle$, se dice que G tiene presentación finita si $|S|, |R| < \infty$.

Dicho ésto, procederemos a introducir el problema de la palabra.

El problema de la palabra *Sea G un grupo dado por una presentación finita, ¿existe un algoritmo que decida si una palabra dada en los generadores de G es, o no, equivalente a la palabra vacía? (esto es, a la identidad en G).*

Si existe un algortimo para el problema de la palabra en un grupo, se dice que es solubre para este.

Existen diferentes maneras de proceder al momento de dar solución al problema de la palabra para cierto grupo. Una de ellas es mediante la función de Dehn.

Definición 14 *Sean G un grupo con presentación finita $P = \langle S|R\rangle$ y w una palabra en los generadores de G, el área algebraica de w se define como*

$$Area_a(w) := min\{N | w = \prod_{i=1}^{N} x_i^{-1} r_i x_i, x_i \in F_S, r_i \in R^{\pm 1}\}.$$

La función de Dehn de P, es la función $\delta_P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$\delta_P(n) := max\{Area_a(w) | w = 1_G, |w| \leq n\}.$$

La relación entre esta función y el problema de la palabra esta dada por el siguiente resultado.

Proposición 15 *Sea G un grupo con presentación finita. El problema de la palabra es soluble en G si y solo si la función de Dehn de cada presentación finita es computable (recursiva).*

Otra manera de atacar el problema de la palabra en un grupo es llevándolo a su forma normal, para esto es necesario definir el conjunto de formas normales de un grupo.

Definición 16 *Sea G un grupo con presentación $\langle S|R\rangle$. El conjunto de formas normales de G, con dicha presentación, es el conjunto de palabras en $S \cup S^{-1}$ que incluye una y solo una representación de cada elemento de G.*

Notemos, entonces, que encontrar un algoritmo que lleve cualquier palabra en G a su forma normal, es equivalente a resolver el problema de la palabra en dicho grupo, pues basta con verificar si se trata de la forma normal de la identidad.

Es importante mencionar que basta con resolver el problema de la palabra para cierta presentación de un grupo G, pues existe una manera de llegar de una presentación a otra. El proceso para hacer eso posible es mediante cuatro transformaciones, llamadas **transformaciones de Tietze** y dadas de la siguiente manera.

Sea $\langle g_1, g_2, \ldots | r_1, r_2, \ldots\rangle$ una presentación de un grupo G. Tenemos las siguientes transformacione de Tietze.

- Si las palabras $w_1, w_2, \ldots$ pueden ser llevadas a la palabra vacía mediante una cantidad finita de operaciones elementales con $r_1, r_2, \ldots$, entonces añadimos $w_1, w_2, \ldots$ al conjunto de relaciones de la presentación de G
- Si algunas de las relaciones $r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots$ pueden ser llevadas a la palabra vacía mediante operaciones elementales con algunas otras relaciones de la presentación, entonces eliminamos $_{i_1}, r_{i_2}, \ldots$.
- Si $u_1, u_2, \ldots$ son palabras en $g_1, g_2, \ldots$, se agregan los símbolos $h_1, h_2, \ldots$ a los generadores y las relaciones $h_1 = u_1, h_2 = u_2, \ldots$.
- Si algunas de las relaciones de la presentación es de la forma $g_{e_1} = v_1, g_{e_2} = v_2, \ldots$, donde $g_{e_1}, g_{e_2}, \ldots$ son generadores de G y $v_1, v_2, \ldots$ son palabras en las que no aparecen los generadores $g_{e_1}, g_{e_2}, \ldots$. Se eliminan $g_{e_1}, g_{e_2}, \ldots$ de los generadores y $g_{e_1} = v_1, g_{e_2} = v_2, \ldots$ de las relaciones; además, se sustituyen $g_{e_1}, g_{e_2}, \ldots$ por $v_1, v_2, \ldots$ en el resto de las relaciones.

Así, basta con resolver el problema de la palabra para un presentación específica de un grupo, para afirmar que es soluble en éste.

2.2. Ejemplos

Ya que conocemos de qué trata el problema de la palabra, es necesario, para una mayor comprensión de éste, realizar algunos ejemplos que sirvan como preámbulo para nuestro objetivo inicial, el cual, recordemos, es dar solución al problema de la palabra en el grupo de trenzas.

Ejemplo 17 *El problema de la palabra es soluble para el grupo G dado por la presentación*

$$\langle a, b, c | aba^{-1}b^{-1}, bcb^{-1}c^{-1}, aca^{-1}c^{-1}, c^7 \rangle.$$

Observemos que el conjunto de formas normales de G está dado por

$$N = \{a^l b^m c^n | l, m, n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n < 7\},$$

pues cualquier elemento de dicho conjunto está en G, por ser producto de sus generadores; además, si tomamos una palabra w en los generadores de G, por las primeras tres relaciones, tenemos que los generadores conmutan entre sí, de manera que podemos llevar a w a la forma

$$w = a^{l_1} a^{l_2} \cdots a^{l_p} b^{m_1} b^{m_2} \cdots b^{m_q} c^{n_1} c^{n_2} \cdots c^{c_r},$$

donde $l_1, \ldots, l_p, m_1, \ldots, m_q, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$ y $p, q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ahora, sean $l = l_1 + \cdots + l_p$, $m = m_1 + \cdots + m_q$ y $n' = n_1 + \cdots + n_r$, tenemos que

$$w = a^l b^m c^{n'};$$

como el orden de c es 7, por la cuarta relación, tenemos que $c^{n'} = c^n$, donde $n = n' \bmod 7$. Así,

$$w = a^l b^m c^n \in N,$$

por lo que $G = N$. Es fácil ver que cada palabra en G puede ser expresada de forma única como elementos de N, de manera de N es, efectivamente, el conjunto de las formas normales de G.

Como se mencionó con anterioridad, encontrar una manera de expresar una palabra en los generadores de G en su forma normal es equivalente a resolver el problema de la palabra en dicho grupo, pues basta con verificar si coincide con la forma normal de la palabra vacía, que en este caso sería $1_G = a^0 b^0 c^0$. Por lo tanto, tenemos que el problema de la palabra es soluble en G.

El ejemplo anterior muestra de manera explícita como dar solución al problema mediante el conjunto de formas normales de un grupo; veamos ahora un ejemplo en el algoritmo se haga directamente con la presentación del grupo.

Ejemplo 18 *El grupo libre en n generadores F_n, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tiene problema de la palabra soluble.*

Para ver esto, primero notemos que cono F_n es libre, tiene una presentación de la forma

$$F_n = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n | \emptyset \rangle.$$

Observemos también, que no tiene relaciones. Dicho ésto, sea w una palabra en los generadores de F_n, se eliminan las subpalabras de la forma $x_i x_i^{-1}$ y $x_i^{-1} x_i$; como w es una palabra, tenemos que tiene longitud finita, por lo que este proceso se repitirá un número finito de veces. Finalmente, se verifica si la palabra resultante a este proceso es o no la palabra vacía.

Notemos que este algoritmo da, efectivamente, solución al problema de la palabra en F_n.

3. El problema de la palabra para los grupos de trenzas

En este ultimo capítulo nos concentraremos en tratar de dar solución al problema de la palabra en el grupo de trenzas. Recordemos que en los primeros capítulos definimos dicho grupo y mostramos construcciones equivalentes; una de las cosas importantes vistas, es que el grupo de trenzas tiene una presentación finita dada de la siguiente manera.

$$B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} | \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i-j| > 1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \text{ si } i = 1, \dots, n-2 \rangle$$

Notemos que la presentación del grupo de trenzas es un tanto más complicada que la de los ejemplos vistos anteriormente, por lo que dar solución al problema de la palabra en dicho grupo, representará un mayor esfuerzo y uso de herramientas.

3.1. El problema de la palabra para los grupos de trenzas clásicos

Para dar solución al problema de la palabra en el grupo de trenzas, nos apoyaremos de gran manera en el siguiente resultado.

Lema 19 *Sea $q : \mathcal{PB}_n \to \mathcal{PB}_{n-1}$ la proyección. Entonces, p es sobreyectiva y $Ker(p) \cong F_{n-1}$, donde F_{n-1} es el grupo libremente generado por los elementos*

$$\hat{x}_i = (\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}) \sigma_i^{-1} (\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n-1}), \ 1 \leq i \leq n-1.$$

Recordemos que los elementos σ_i denotan trenzas elementales.

Más aún, la sucesión exacta corta

$$1 \to F_{n-1} \to \mathcal{PB}_n \to \mathcal{PB}_{n-1} \to 1$$

se escinde y entonces, $\mathcal{PB}_n \cong F_{n-1} \rtimes \mathcal{PB}_{n-1}$. En particular, todo elemento de $\mathcal{PB}_n$ se puede escribir de manera única como el producto de x_i's y un elemento en $\mathcal{PB}_{n-1}$. Esto es, sea $w \in \mathcal{PB}_n$, entonces

$$w = \hat{x}_{i_1}^{e_1} \cdots \hat{x}_{i_r}^{e_r} \tilde{w},$$

donde $\hat{x}_j \in F_{n-1}, e_j = \pm 1, j = 1, \dots, r, r \in \mathbb{N}$ y $\tilde{w} \in \mathcal{PB}_{n-1}$.

Dicho esto, procederemos atacar nuestro problema principal.

Proposición 20 *El problema de la palabra es soluble para el grupo de trenzas.*

Demostración. Sea $\beta \in B_n$ procederemos a verificar si β es, o no, la identidad. Describiremos dicho proceso mediante pasos.

Tenemos que β está dada como producto de sus generadores. Así,

$$\beta = \sigma_{i_1}^{e_1} \sigma_{i_2}^{e_2} \cdots \sigma_{i_m}^{e_m},$$

donde $i_j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $e_j \in \{1, -1\}$, $j = 1, 2, \dots, m$ y $m \in \mathbb{N}$.

Paso 1 Si la permutación de la trenza β es no trivial, entonces β no es la identidad. De lo contrario, se procede a realizar los siguientes pasos.

Paso 2 Para cada $k = 0, 1, \dots, m$ definimos el índice j_k como la posición de la n-ésima cuerda después del movimiento $\sigma_{i_1}^{e_1} \sigma_{i_2}^{e_2} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k}$. Ahora, definimos la palabra α_i como

$$\alpha_i = \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n-1},$$

para cada $i = 1, \ldots, n-1$. Notemos que, dado que la permutación de la trenza es trivial, entonces $j_0 = j_m = n$ y $\alpha_{j_0} = \alpha_{j_m} = 1_{B_n}$.

Paso 3 Mediante inserciones, llevamos la trenza β a la siguiente forma

$$\beta = (\alpha_{j_0}^{-1} \sigma_{i_1}^{e_1} \alpha_{j_1})(\alpha_{j_1}^{-1} \sigma_{i_2}^{e_2} \alpha_{j_2}) \cdots (\alpha_{j_{m-1}}^{-1} \sigma_{i_m} \alpha_{j_m}).$$

Notemos que cada terna de elementos tiene alguna de las siguientes formas.

1 $(\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})\sigma_i(\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n-1})$

2 $(\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})\sigma_i^{-1}(\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n-1})$

3 $(\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})\sigma_{i-1}(\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{n-1})$

4 $(\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})\sigma_{i-1}^{-1}(\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{n-1})$

5 $(\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})\sigma_k^{\pm 1}(\sigma_i \cdots \sigma_{n-1})$, $k < i-1$

6 $(\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})\sigma_k^{\pm 1}(\sigma_i \cdots \sigma_{n-1})$, $k > i$

Paso 4 Para las ternas de la forma 1.

Tenemos que

$$\begin{aligned}(\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})\sigma_i(\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n-1}) &= (\sigma_i \cdots \sigma_{n-1})^{-1}(\sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n-1}) \\ &= 1_{B_n}.\end{aligned}$$

Así, procedemos a eliminar todas las ternas de la forma 1.

Paso 5 Para las ternas de la forma 2, observemos que

$$(\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})\sigma_{i-1}(\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{n-1}) = \hat{x}_i,$$

donde $\hat{x}_i$ son las definidas en el Lema, de manera que $\hat{x}_i \in F_{n-1}$.

Entonces, intercambiamos las ternas de esta forma por $\hat{x}_i$.

Paso 6 Para las ternas de la forma 3, notemos que

$$(\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})\sigma_{i-1}(\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{n-1}) = \hat{x}_{i-1}^{-1},$$

donde $\hat{x}_{i-1}^{-1} \in F_{n-1}$. Así, intercambiamos las ternas tipo 3 por $\hat{x}_{i-1}^{-1}$.

Paso 7 Para las ternas de la forma 4, tenemos que

$$\begin{aligned}(\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})\sigma_{i-1}^{-1}(\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{n-1}) &= (\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}\sigma_{i-1}^{-1})(\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{n-1}) \\ &= (\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{n-1})^{-1}(\sigma_{i-1} \cdots \sigma_{n-1}) \\ &= 1_{B_n}\end{aligned}$$

Entonces, eliminamos las ternas de la forma 4.

Paso 8 Para las ternas de la forma 5.

Recordemos, de las relaciones de la presentación del grupo que trenzas, que $\sigma_r\sigma_s = \sigma_s\sigma_r$ si $|r-s|>1$, con $r,s\in\{1,\ldots,n-1\}$, lo cual implica que $\sigma_r\sigma_s^{-1} = \sigma_s^{-1}\sigma_r$. De ésto, para $k<i-1$, tenemos que $|i-k|>1$, y así

$$\begin{aligned}
(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_k^{\pm1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_i\sigma_k^{\pm1}(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1})\\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})(\sigma_i\sigma_{i+1})\sigma_k^{\pm1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\
&\vdots\\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\sigma_k^{\pm1}\\
&= (\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\sigma_k^{\pm1}\\
&= \sigma_k^{\pm1}.
\end{aligned}$$

Entonces, sustituimos las ternas de a forma 5 por $\sigma_k^{\pm1}$.

Paso 9 Para las ternas de la forma 6. Para $k>i$.

De la relación $\sigma_r\sigma_s = \sigma_s\sigma_r$ si $|r-s|>1$, con $r,s\in\{1,\ldots,n-1\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_k(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) &= (\sigma_i\cdots\sigma_{k-2})\sigma_k(\sigma_{k-1}\sigma_k\cdots\sigma_{n-1})\\
&= (\sigma_i\cdots\sigma_{k-2})(\sigma_k\sigma_{k-1}\sigma_k)(\sigma_{k+1}\cdots\sigma_{n-1})
\end{aligned}$$

Ahora, de la relación $\sigma_r\sigma_{r+1}\sigma_r = \sigma_{r+1}\sigma_r\sigma_{r+1}$, para $r\in\{1,\ldots,n-1\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_k(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) &= (\sigma_i\cdots\sigma_{k-2})(\sigma_{k-1}\sigma_k\sigma_{k-1})(\sigma_{k+1}\cdots\sigma_{n-1})\\
&= (\sigma_i\cdots\sigma_k)\sigma_{k-1}(\sigma_{k+1}\cdots\sigma_{n-1}).
\end{aligned}$$

Luego, usando de nuevo la relación $\sigma_r\sigma_s = \sigma_s\sigma_r$ si $|r-s|>1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_k(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) &= (\sigma_i\cdots\sigma_k)(\sigma_{k+1}\cdots\sigma_{n-1})\sigma_{k-1}\\
&= (\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\sigma_{k-1}.
\end{aligned}$$

De esto,

$$\begin{aligned}
(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_k(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\sigma_{k-1}\\
&= (\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\sigma_{k-1}\\
&= \sigma_{k-1}.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_k^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1}\sigma_k^{-1})(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\\
&= (\sigma_k(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}))^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\\
&= ((\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\sigma_{k-1})^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\\
&= \sigma_{k-1}^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\\
&= \sigma_{k-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Así,

$$(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_k^{\pm1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) = \sigma_{k-1}^{\pm1}.$$

Entonces, intercambiamos las ternas de la forma 6 por $\sigma_{k-1}^{\pm1}$.

Paso 10 Notemos que después de los pasos anteriores, reducimos β al producto de términos de la forma $\hat{x_1},\hat{x_2},\ldots,\hat{x_{n-1}},\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-2}$ y sus inversos. Observemos que σ_{n-1} aparece únicamente como parte de algún $\hat{x_i}^{\pm1}$. Ahora, probaremos que para $i=1,\ldots,n-2$ y $j=1,\ldots,n-1$, se tiene que $\sigma_i^{-1}x_j\sigma_i$ puede escribirse como producto de $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{n-1}$ y sus inversos.

Si $i<j-1$, tenemos, por las relaciones, que

$$\begin{aligned}\sigma_i^{-1}\hat{x}_j\sigma_i = \ & \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{j+1}^{-1})\sigma_j(\sigma_j\cdots\sigma_{n-1})\sigma_i\\ &= (\sigma_i^{-1}\sigma_i)(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{j+1}^{-1})\sigma_j(\sigma_j\cdots\sigma_{n-1})\\ &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{j+1}^{-1})\sigma_j(\sigma_j\cdots\sigma_{n-1})\\ &= \hat{x}_j\end{aligned}$$

Si $i=j-1$, esto es, $j=i+1$, entonces

$$\begin{aligned}\sigma_i^{-1}\hat{x}_j\sigma_i &= \sigma_i^{-1}\hat{x}_{i+1}\sigma_i\\ &= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}^2(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^2\sigma_i(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}\sigma_{i+1}\sigma_i(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})(\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}\sigma_i)(\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}\sigma_i)(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1})(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1})(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}\sigma_i(\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_{i+1}\sigma_i)\sigma_{i+1}^{-1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1})(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1})\sigma_i\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1})(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1})\sigma_i\sigma_i(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1})\\ &\quad(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1})\sigma_{i+1}^{-1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1})(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1})\sigma_i(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\\ &\quad(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1})\sigma_{i+1}^{-1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= x_{i+1}x_ix_{i+1}^{-1}.\end{aligned}$$

Si $i=j$, tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma_i^{-1}\hat{x}_j\sigma_i &= \sigma_i^{-1}\hat{x}_i\sigma_i\\ &= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-}1)\sigma_i(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\sigma_i\\ &= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-}1)\sigma_i^2\sigma_{i+1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\sigma_i\\ &= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-}1)\sigma_i^2\sigma_{i+1}\sigma_i(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1}\sigma_{i+1}^{-}1)\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^2(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})(\sigma_{i+1}^{-}1\sigma_{i+1})\sigma_i\sigma_{i+1}^2(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_i\sigma_{i+1}^2(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= \sigma_i^{-1}\sigma_i(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}^2(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}^2(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= \hat{x}_{i+1}.\end{aligned}$$

Si $i>j$, tenemos que $\sigma_i\hat{x}_j=\hat{x}_j\sigma_i$, de ésto,

$$\begin{aligned}\sigma_i^{-1}\hat{x}_j\sigma_i &= \sigma_i^{-1}\sigma_i\hat{x}_j\\ &= \hat{x}_j.\end{aligned}$$

Así, hemos probado que las palabras de la forma $\sigma_i^{-1}\hat{x}_j\sigma_i$ pueden ser escritas como palabras con elementos $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{n-1}$ y sus inversos, lo cual implica que las palabras de la forma $\sigma_i\hat{x}_j\sigma_i^{-1}$ también pueden expresarse como palabras con dichos elementos, pues, si $i<j-2$ o $i>j$, entonces

$$\sigma_i\hat{x}_j\sigma_i^{-1}=x_j,$$

si $i=j-1$,

$$\sigma_i\hat{x}_j\sigma_i^{-1}=\sigma_i\hat{x}_{i+1}\sigma_i^{-1}=\hat{x}_i,$$

y si $i = j$, entonces

$$\sigma_i \hat{x}_j \sigma_i^{-1} = \sigma_i \hat{x}_i \sigma_i^{-1} = \hat{x}_i^{-1} \hat{x}_{i+1} \hat{x}_i.$$

Ahora, utilizando lo anterior, expresamos a β de manera que los elementos de la forma $\sigma_i^{\pm 1}$ se encuentren a la derecha, obteniendo

$$\beta = w_1 w_2,$$

donde w_1 es producto de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ y sus inversos, y w_2 es producto de $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$ y sus inversos.

Paso 11 Tenemos que $\beta = w_1 w_2$, donde w_1 es producto de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ y sus inversos, y w_2 es producto de $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$ y sus inversos. Ahora, del lema anterior, tenemos que esta manera de expresar a β como producto de un elemento de F_{n-1} y uno de $\mathcal{PB}_{n-1}$ es única.

Repetimos los pasos 2 a 11 con la palabra w_2 de manera que podamos exapresarlo como el producto de un elemento de F_{n-2} y uno de $\mathcal{PB}_{n-2}$. Volvemos a realizar este proceso hasta obtener a β expresada como el producto de elementons en un grupo libre.

Paso 12 Reducimos cada una de las palabras en el grupo libre al igual que en el ejemplo ?. Si obtenemos la palabra vacía, entonces $\beta = 1_{B_n}$, de lo contrario, $\beta \neq 1_{B_n}$.

Este algoritmo demuestra que el problema de la palabra es soluble para el grupo de trenzas. ∎

3.2. Ejemplo

Para ilustrar mejor el funcionamiento del algoritmo descrito anteriormente, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 21 *Consideremos la trenza $\gamma \in B_4$ definida por la palabra*

$$\gamma = \sigma_1^{-1} \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_1^{-1}.$$

Paso 1 *Notemos que la trenza tiene la forma de la Figura 3.*

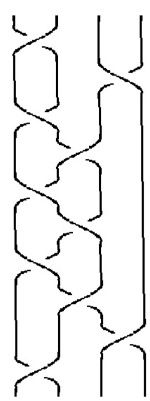


Figura 3: Trenza γ.

Observemos que la trenza tiene la permutación trivial, de manera que procedemos a realizar los siguientes pasos.

Paso 2 *Tenemos que, para esta trenza, los subíndices j_k están dados de la siguiente manera.*

$$\begin{array}{llll} j_0 = 4, & j_1 = 4, & j_2 = 3, & j_3 = 3, \\ j_4 = 2, & j_5 = 1, & j_6 = 1, & j_7 = 2, \\ j_8 = 3, & j_9 = 4, & j_{10} = 4. & \end{array}$$

Paso 3 *Reescribimos a γ como*

$$\begin{aligned} \gamma \quad &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_3\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)(\alpha_2^{-1}\sigma_1\alpha_1) \\ &(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)(\alpha_1^{-1}\sigma_1\alpha_2)(\alpha_2^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_3^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4) \end{aligned}$$

Paso 4 *Eliminamos las palabras de la forma 1, de manera que*

$$\begin{aligned} \gamma \quad &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_3\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)(\alpha_2^{-1}\sigma_1\alpha_1) \\ &(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\underline{(\alpha_1^{-1}\sigma_1\alpha_2)}(\alpha_2^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_3^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4) \\ &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_3\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)(\alpha_2^{-1}\sigma_1\alpha_1) \\ &(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)(\alpha_2^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_3^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4) \end{aligned}$$

Paso 5 *Intercambiamos las palabras de la forma 2, por $\hat{x}_1$, de esto*

$$\begin{aligned} \gamma \quad &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_3\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)(\alpha_2^{-1}\sigma_1\alpha_1) \\ &(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\underline{(\alpha_2^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_3^{-1}\alpha_4)}(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4) \\ &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_3\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)(\alpha_2^{-1}\sigma_1\alpha_1) \\ &(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\underline{\hat{x}_2\hat{x}_3}(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4) \end{aligned}$$

Paso 6 *Intercambiamos las palabras de la forma 3 por $\hat{x}_{i-1}^{-1}$, así*

$$\begin{aligned} \gamma \quad &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)\underline{(\alpha_4^{-1}\sigma_3\alpha_3)}(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)\underline{(\alpha_2^{-1}\sigma_1\alpha_1)} \\ &(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\hat{x}_2\hat{x}_3(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4) \\ &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)\underline{\hat{x}_3^{-1}}(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)\underline{\hat{x}_1^{-1}} \\ &(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\hat{x}_2\hat{x}_3(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4) \end{aligned}$$

Paso 7 *Eliminamos las palabras de la forma 4, de manera que obtenemos*

$$\begin{aligned} \gamma \quad &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)\hat{x}_3^{-1}(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)\underline{(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)}\hat{x}_1^{-1} \\ &(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\hat{x}_2\hat{x}_3(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4) \\ &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)\hat{x}_3^{-1}(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)\hat{x}_1^{-1} \\ &(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\hat{x}_2\hat{x}_3(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4) \end{aligned}$$

Paso 8 *Intercambiamos las palabras de la forma 5 por $\sigma_k^{\pm 1}$, de ésto,*

$$\begin{aligned} \gamma \quad &= \underline{(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)}\hat{x}_3^{-1}\underline{(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)}\hat{x}_1^{-1} \\ &(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\hat{x}_2\hat{x}_3\underline{(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)} \\ &= \underline{\sigma_1^{-1}}\hat{x}_3^{-1}\underline{\sigma_1}\hat{x}_1^{-1}(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\hat{x}_2\hat{x}_3\underline{\sigma_1^{-1}} \end{aligned}$$

Paso 9 *Intercambiamos las ternas de la forma 6 por $\sigma_{k-1}^{\pm 1}$, así,*

$$\begin{aligned} \gamma \quad &= \sigma_1^{-1}\hat{x}_3^{-1}\sigma_1\hat{x}_1^{-1}\underline{(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)}\hat{x}_2\hat{x}_3\sigma_1^{-1} \\ &= \sigma_1^{-1}\hat{x}_3^{-1}\sigma_1\hat{x}_1^{-1}\underline{\sigma_1}\hat{x}_2\hat{x}_3\sigma_1^{-1} \end{aligned}$$

Paso 10 *Tenemos que* $\gamma = \sigma_1^{-1}\hat{x}_3^{-1}\sigma_1\hat{x}_1^{-1}\sigma_1\hat{x}_2\hat{x}_3\sigma_1^{-1}$. *Ahora, procederemos a reescribir a* γ *de manera que los* $\hat{x}_i$ *se encuentren a la izquierda y los* σ_j *esten a la derecha.*

Sabemos que $\sigma_1^{-1}\hat{x}_3^{-1}\sigma_1 = (\sigma_1^{-1}\hat{x}_3\sigma_1)^{-1} = \hat{x}_3^{-1}$, *de esto,*

$$\begin{aligned} \gamma &= \underline{\sigma_1^{-1}\hat{x}_3^{-1}\sigma_1}\hat{x}_1^{-1}\sigma_1\hat{x}_2\hat{x}_3\sigma_1^{-1} \\ &= \underline{\hat{x}_3^{-1}}\hat{x}_1^{-1}\sigma_1\hat{x}_2\hat{x}_3\sigma_1^{-1}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \gamma &= \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\sigma_1\hat{x}_2\hat{x}_3\sigma_1^{-1} \\ &= \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\sigma_1\hat{x}_2\underline{\sigma_1^{-1}\sigma_1}\hat{x}_3\sigma_1^{-1}. \end{aligned}$$

Recordemos que $\sigma_1\hat{x}_2\sigma_1^{-1} = \hat{x}_1$, *de ésto,*

$$\begin{aligned} \gamma &= \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\underline{\sigma_1\hat{x}_2\sigma_1^{-1}}\sigma_1\hat{x}_3\sigma_1^{-1} \\ &= \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\underline{\hat{x}_1}\sigma_1\hat{x}_3\sigma_1^{-1}. \end{aligned}$$

Además, $\sigma_1\hat{x}_3\sigma_1^{-1} = \hat{x}_3$. *Así,*

$$\begin{aligned} \gamma &= \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\hat{x}_1\underline{\sigma_1\hat{x}_3\sigma_1^{-1}} \\ &= \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\hat{x}_1\underline{\hat{x}_3}. \end{aligned}$$

De manera que, al finalizar este paso, obtenemos $\gamma = \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\hat{x}_1\hat{x}_3$.

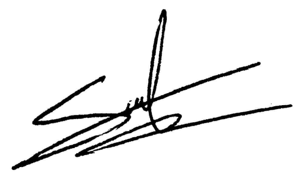
Paso 11 *Procedemos a eliminar las palabras de la forma* $\hat{x}_i\hat{x}_i^{-1}$ *y* $\hat{x}_i^{-1}\hat{x}_i$. *De manera que obtenemos lo siguiente.*

$$\begin{aligned} \gamma &= \hat{x}_3^{-1}\underline{\hat{x}_1^{-1}\hat{x}_1}\hat{x}_3 \\ &= \underline{\hat{x}_3^{-1}\hat{x}_3} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Al finalizar este paso obtenemos $\gamma = 1$.

Paso 12 *Notemos que representamos a* γ *como la palabra vacía. Así,* $\gamma = 1_{B_4}$.

Este trabajo fue realizado durante el Tercer Verano de Investigación en Matemáticas, en el Instituto de Matemáticas de la UNAM Unidad Cuernavaca bajo la supervisión del Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña por la alumna



Sandy Guadalupe Aguilar Rojas
Universidad Autónoma de Baja California

Referencias

[1] Bridson, M. The geometry of the word problem. (2004). En Bridson, M. y Salomon, S (Ed.), *Invitations to Geometry and Topology* (pp. 29-91). Nueva York, Estados Unidos: Oxford University Press.

[2] Chamizo, F. (2004). Grupo fundamental. Recuperado el 10 de agosto del 2017 de https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/asignaturas/to2009/topologian0305/APtopo5.pdf

[3] Cisneros, J. (2001). Grupo fundamental y espacios cubrientes. Recuperado el 10 de agosto del 2017 de http://www.matcuer.unam.mx/ jlcm/Notas/gpfuncub.pdf

[4] Faulk, M. (2015). Orientation, Euler characteristic and surfaces. Recuperado el 7 de marzo del 2018 de www.math.columbia.edu/ faulk/Lecture6.pdf

[5] Fernándezm, I. (2004). Introducción a la teoría combinatoria dde grupos. Recuperado el 7 de julio del 2018 de http://digibuo.uniovi.es/dspace/bitstream/10651/27929/3/TFM_Isabel %20Fern %C3 %A1ndez %20Mart %C3 %ADnez.pdf

[6] Glasscock, D. (2012). What is a Braid Group? Recuperado de https://people.math.osu.edu/glasscock.4/braid_groups.pdf

[7] González, J. (2011). Basic results on braid groups. *Annales mathématiques Blaise Pascal, 18*, 15-59.

[8] Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

[9] Jackson, N. (2004). Notes on braid groups. Recuperado de https://homepages.warwick.ac.uk/ maseay/doc/braids.pdf

[10] Macho, M. (2006). Topología algebraica. Recuperado de http://www.ehu.eus/ mtwmastm/TopoAlg0506.pdf

[11] Massey, W. (1991). *A basic course in algebraic topology.* Nueva York, Estados Unidos: Springer Verlag New York Inc.

[12] Milne, J. (2017). Group theory. Recuperado el 23 de julio del 2018 de http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/GT.pdf

[13] Navarro, M. (2016) Trenzas y Nudos. Recuperado de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/56152/1/Nudos_y_trenzas_NAVARRO_PEREZ_MIGUEL_ANGEL.pdf

[14] Paris, L. Braid groups and Artin Groups. (2009). En A. Papadopoulos (Ed.), *Handbook of Teichmüller Theory* (pp. 389-451). Zúrich, Suiza: European Mathematical Society Publishing House.

[15] Peifer, D. (1997). An introduction to combinatorial group theory and the word problem. *Mathematics Magazine, 70, (1)*, 3-10.

[16] Reeder, M. (2015). Notes on group theory. Recuperado el 23 de julio del 2018 de https://www2.bc.edu/mark-reeder/Groups.pdf

[17] Rotman, J. (2003). *Advanced Modern Algebra.* Estados Unidos: Prentice Hall.