El Teorema de Gauss-Bonnet

Norma Angélica Zavaleta García
Asesorada por
Gregor Weingart

25 de Junio - 11 de Agosto, 2018

Índice

1. Curvas y superficies **3**
1.1. Curvas . . . 3
1.2. Superficies regulares . . . 4
1.3. Orientación de superficies . . . 6

2. La Aplicación de Gauss **7**

3. Primer y segunda formas fundamentales **10**
3.1. Primera forma fundamental . . . 10
3.2. Segunda forma fundamental . . . 11

4. Teorema de Gauss-Bonnet **12**

Agradecimientos:

Agradezco al Dr. Gregor Weingart por el apoyo y la paciencia en este verano de investigación, de igual forma agradezco a mis compañeros del verano por haber hecho de esta una bonita experiencia.

Agradezco el apoyo económico para el desarrollo del presente proyecto al:

Proyecto FORDECYT 265667 "Programa para un avance global e integrado de la Matemática Mexicana".

Introducción

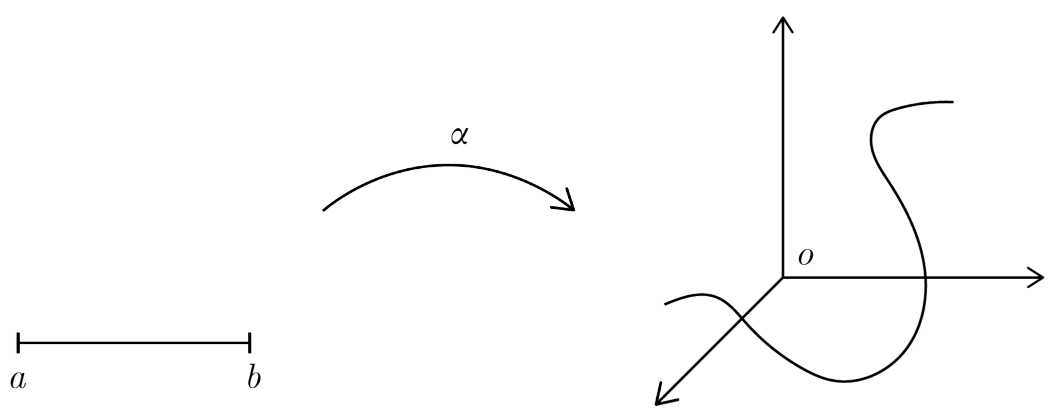
El objetivo del presente trabajo es mostrar los conceptos, las ideas y el lenguaje necesario para poder entender el significado del Teorema de Gauss-Bonnet y en qué radica su importancia. El Terorema de Gauss-Bonnet es una proposición importante e sobre superficies, donde se relaciona una cualidad geométrica (la curvatura) con una cualidad topólogica (la característica de Euler-Poincaré).
Algunas herramientas teóricas necesarias, de geometría, son todo lo referente a curvas y superficies regulares, la aplicación de Gauss, la primera y segunda formas fundamentales y curvatura. A lo largo de este escrito se van a dar definiciones y proposiciones importantes, así como ejemplos para que los conceptos vayan quedando claros, para acercarnos a entender este bonito teorema de geometría.

1. Curvas y superficies

Con la finalidad de que este escrito sea fácil de leer para cualquier persona que esté interesado en el tema, en esta sección se van a dar de manera breve y general las definiciones importantes y necesarias para las secciones posteriores.

1.1. Curvas

1.1.1 Definición. Una curva diferenciable parametrizada es una aplicación diferenciable $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de un intervalo diferenciable $I = (a, b)$ de la línea real $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^3$.



La palabra diferenciable en esta definición se refiere a que α manda a cada $t \in I$ a un punto $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ de tal manera que las funciones $x(t), y(t)$ y $z(t)$ son diferenciables. La variable t es llamada el parámetro de la curva α. Vamos a denotar por $x'(t)$ a la primera derivada de x con respecto al parámetro t, y de igual forma para y y z, el vector $(x'(t), y'(t), z'(t)) = \alpha'(t) \in \mathbb{R}^3$ es llamado vector tangente o vector velocidad de la curva α en t. La imagen $\alpha(I) \in \mathbb{R}^3$ es llamada traza de α.

Ahora, sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable parametrizada. Para cada $t \in I$ con $\alpha'(t) \neq 0$, existe una linea recta bien definida, que contiene al punto $\alpha(t)$ y al vector $\alpha'(t)$, ésta línea es llamada línea tangente a α en t.

1.1.2 Definición. Una curva diferenciable parametrizada $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Dado $t \in I$, la longitud de arco de una curva diferenciable parametrizada regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de un punto t_o esta dado por:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)| dt$$

donde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

es la longitud del vector $\alpha'(t)$. Ya que $\alpha'(t) \neq 0$, la longitud de arco s es una función diferenciable de t y $ds/dt = |\alpha'(t)|$.

1.1.3 Definición. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada diferenciable, diremos que dicha curva esta parametrizada por la longitud del arco si $|\alpha'(t)| = 1$.

Si tenemos una curva α parametrizada por longitud de arco s, ya que el vector tangente $\alpha'(t)$ es unitario la norma de la segunda derivada $|\alpha''(t)|$ mide la tasa de cambio del ángulo que hacen las tangentes vecinas con el tagente en s. De esto tenemos la siguiente definición.

1.1.4 Definición. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco $s \in I$. El número $|\alpha''(s)| = k(s)$ es llamado la curvatura de α en s.

Es fácil notar que si tenemos que α es la curva que describe una línea recta $\alpha(s) = us + v$ donde u y v son vectores constantes, tiene curvatura nula, es decir $k(s) = |\alpha(s)| = 0$

1.2. Superficies regulares

Una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ es el resultado de tomar partes del plano y deformarlo de manera que no queden picos, huecos, auto-intersecciones o dobleces, es decir queda una superficie suavecita como una especie de sabanita.

1.2.1 Definición. Un subconjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si para cada $p \in \Sigma$ existe una vecindad V en $\mathbb{R}^3$ y una aplicación $x : U \longrightarrow V \cap \Sigma$ de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ a $V \cap \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

1. x es diferenciable. Esto significa que si se puede escribir

$$x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),\ (u, v) \in U,$$

   donde las funciones $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ tienen derivadas continuas de todos los órdenes en U.

2. x es un homemorfimso. Ya que es x es continua, por la condición 1, esto significa que tiene una inversa $x^{-1} : V \cap \Sigma \longrightarrow U$ que es continua, esto es, x^{-1} es la restricción de una aplicación continua $F : W \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida en un conjunto abierto que contiene a $V \cap \Sigma$

3. Para cada $q \in U$, el diferencial $dx_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es uno a uno. (Condición de regularidad).

La aplicación x se llama una parametrización o un sistema de coordenadas (locales) en (una vecindad de) p. La vecindad $V \cap \Sigma$ de p en Σ se llama vecindad coordenada.

1.2.2 Proposición. *Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, entonces, la gráfica de f es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$ es una superficie regular.*

1.2.3 Definición. Dada una aplicación diferenciable $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, se dice que p es un punto crítico de F si el diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ no es sobre. La imagen $F(p)$ de un punto crítico es llamado valor crítico de F. Un punto de $\mathbb{R}^m$ que no es crítico es llamado valor regular de F.

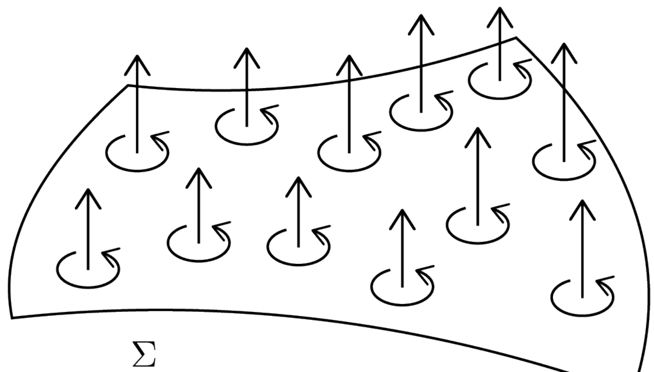
1.2.4 Proposición. *Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $a \in f(U)$ es un valor regular de f, entonces $f^{-1}(a)$ es una superficie regular en $\mathbb{R}$.*

1.2.5 Definición. Sea $f : V \subset \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un subconjunto abierto V de una superficie regular Σ. Se dice que f es diferenciables en $p \in V$ si para alguna parametrización $x : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Sigma$, con $p \in x(U) \subset V$, la composición de $f \circ x : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $x^{-1}(p)$. f es diferenciable en V si y solo si es diferenciable en todos los puntos de V.

1.2.6 Definición. Una superficie parametrizada $x : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable de un abierto $x : U \subset \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. El conjunto $x(U) \subset \mathbb{R}^3$ es llamado traza de x. Decimos que x es regular si el diferencial $dx_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in U$ (es decir $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}$ son linealmente independientes para todo $q \in U$).
Un punto $p \in U$ donde dx_q no es inyectiva es llamado punto singular de x.

1.3. Orientación de superficies

Dada una superficie Σ, se dirá que es orientable si admite un campo de vectores normales N definido sobre la superficie. En este caso el campo de vectores N es llamado una orientación de Σ.



1.3.1 Definición. Una superifcie regular Σ es orientable si es posible cubrirla con una familia de vecindades coordenadas de forma que si un punto $p \in \Sigma$ tiene dos vecindades en esta familia, entonces el cambio de coordenadas tiene jacobiano postivo en p. En este caso la familia de vecindades es llamada una orientación de Σ y Σ se dice orientable. En caso de que no sea posible, la superficie se dice no-orientable.

1.3.2 Proposición. *Una superficie regular $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es orientable si y solo si existe un campo diferenciable de vectores normales unitarios $N : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en Σ.*

1.3.3 Proposición. *Si una superficie regular es dada por:*

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = a\}$$

donde $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y a es un valor regular de f, entonces Σ es orientable.

Demostración. Dado un punto $p = (x, y, z), p \in \Sigma$, vamos a considerar la parametrización de la curva:

$$(x(t), y(t), z(t)),\ t \in I \text{ en } \Sigma$$

pasando por p, cuando $t = t_0$. Ya que la curva está en la superficie Σ, tenemos:

$$f(x(t), y(t), z(t)) = a, \text{ para todo } t \in I$$

derivando respecto a t de ambos lados, tenemos:

$$f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + f_z \frac{dz}{dt} = 0$$

en $t = t_0$

$$f_x(p)\frac{dx}{dt}|_{t_0} + f_y(p)\frac{dy}{dt}|_{t_0} + f_z(p)\frac{dz}{dt}|_{t_0} = 0$$

$$(f_x(p) + f_y(p) + f_z(p)) \cdot (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = 0$$

Esto nos dice que el vector tangente a la curva en $t = t_0$ es perpendicular al vector (f_x, f_y, f_z) en p, y como la curva y el punto eran cualesquiera, podemos concluir que:

$$N(x,y,z) = (\frac{f_x}{\sqrt{{f_x}^2 + {f_y}^2 + {f_z}^2}} + \frac{f_y}{\sqrt{{f_x}^2 + {f_y}^2 + {f_z}^2}} + \frac{f_z}{\sqrt{{f_x}^2 + {f_y}^2 + {f_z}^2}})$$

Es un campo de vectores normales nitarios en Σ, y por la proposición anterior esto implica que Σ es una superficie orientable.

2. La Aplicación de Gauss

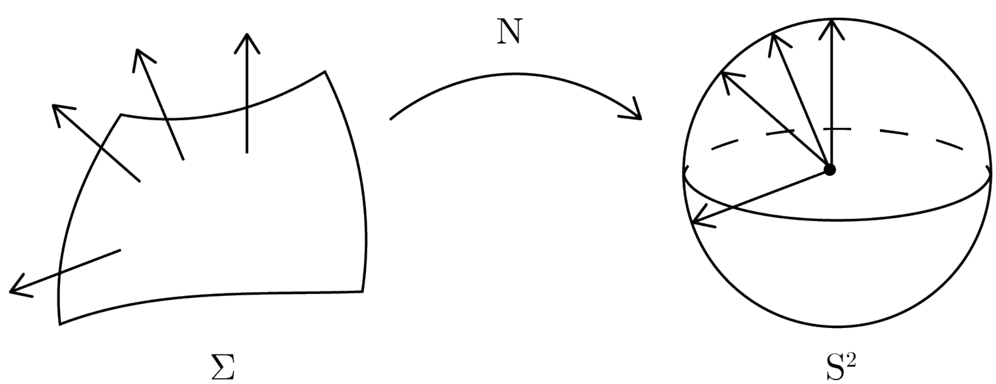
2.0.1 Definición. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con una orientación N. La aplicación:

$$N : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Toma valores en la esfera unitaria

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

La apliación $N : \Sigma \longrightarrow S^2$ se llama aplicación de Gauss para Σ.



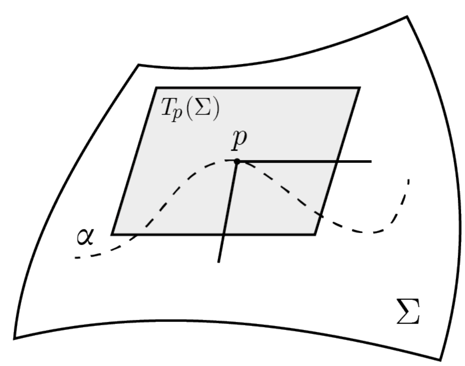
Si fijamos un punto $p \in \mathbb{R}^n$ y un vector $v \in \mathbb{R}^n$. Considerando v como un vector en p, entonces v define un modo de derivar funciones en p, la "derivada direccional en el punto p respecto del vector v", y es un vector tangente a p.

Un espacio tangente es el conjunto asociado a cada punto, en este caso, a cada punto de una superficie Σ, generado por todos los vectores tangentes a dicho punto. Es un espacio vectorial de la misma dimensión que la dimensión local de una vecindad de dicho punto. Se representa:

$$T_p(\Sigma)$$

2.0.2 Definición. Se llama plano tangente a una superficie Σ en un punto $p \in \Sigma$, al plano generado por las tangentes a un curva $x : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ trazada sobre la superficie y que pasa por el punto p y se representa por $T_p(\Sigma)$. Es decir:

$$T_p(\Sigma) := span_{\mathbb{R}}\{\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$



Consideremos una parametrización $x : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de una superficie Σ de $\mathbb{R}^3$, para cada punto $p = x(u, v)$ de Σ, consideremos tambien el plano tangente $T_p(\Sigma)$, sobre el cual tenemos estructura euclidea, denotemos por $I_p(u, v)$ el producto escalar sobre $T_p(\Sigma)$. De la parametrización x, obtenemos la base $\{\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\}$ del espacio tangente.

2.0.3 Proposición. *El diferencial $dN_p : T_p(\Sigma) \longrightarrow T_p(\Sigma)$ de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal autoadjunta. El diferencial de la aplicación de Gauss es llamado el **operador de forma** y en la literatura suele representarse con la letra **S**.*

Demostración. Ya que el diferencial de N en p, dN_p, es lineal, es suficiente probar que :

$$\langle dN_p(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, dN_p(w_2)\rangle$$

para una base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p(\Sigma)$.

Sea $x(u,v)$ una parametrización de Σ en p y $\{x_u, x_v\}$ las bases asociadas de $T_p(\Sigma)$.
Si $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ es una curva parametrizada en Σ con $\alpha(0) = p$, entonces tenemos:

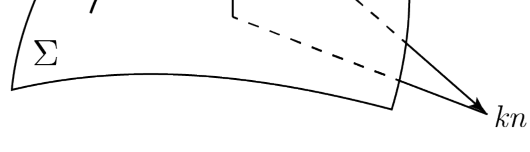
$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(x_u u'(0) + x_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt}N(u(t), v(t))|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0) \end{aligned}$$

En particular $dN_p(x_u) = N_u$ y $dN_p(x_v) = N_v$, por lo tanto esto prueba que:

$$\langle N_u, x_v\rangle = \langle x_u, N_v\rangle$$

es decir, el diferencial de aplicación de Gauss es una aplicación autoadjunta.

2.0.4 Definición. Sea c una curva regular en Σ, que pasa por $p \in \Sigma$, k la curvatura de c en p y $cos\theta = \langle n, N\rangle$, donde n es el vector normal a c y N es el vector normal a Σ en p. El número $kn = kcos\theta$ es llamado la curvatura de $c \subset \Sigma$ en p.



En otras palabras, kn es el tamaño de la proyección del vector Kn sobre la normal a la superficie en p, con un signo dado por la orientación N de Σ en p.

2.0.5 Definición. La máxima curvatura normal k_1 y la mínima curvatura normal k_2 son llamadas curvaturas principales de Σ en p; las correspondientes direcciones, son llamadas direcciones principales en p.

2.0.6 Definición. Si una curva regular conexa $c \subset \Sigma$ es tal que para todo $p \in c$ la línea tangente de c e una dirección principal en p, entonces c es llamada línea de curvatura.

2.0.7 Proposición. *Una condición necesaria y suficiente para que una curva regular y conexa c, se la línea de curvatura de la superficie Σ es que:*

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$$

para cualquier parametrización $\alpha(t)$ de c, donde $N(t) = N \circ \alpha(t)$ y $\lambda(t)$ es una función diferenciable de t. En este caso $-\lambda(t)$ es la curvatura principal a lo largo de $\alpha'(t)$.

2.0.8 Definición. Sea $p \in \Sigma$ y sea $dN_p : T_p(\Sigma) \longrightarrow T_p(\Sigma)$, el diferencial de aplicación de Gauss. El determinante de dN_p es la curvatura Gaussiana $\mathbf{K}$ de Σ en p. La mitad de la traza de dN_p es la curvatura media $\mathbf{H}$ de Σ en p.

2.0.9 Definición. Un punto p de una superficie Σ es llamado:

1. Elíptico si $det(dN_p) > 0$
   Ejemplo: Los puntos de la esfera

2. Hiperbólico si $det(dN_p) < 0$
   Ejemplo: El origen del paraboloide hiperbólico.

3. Parabólico $det(dN_p) = 0$ con $dN_p \neq 0$
   Ejemplo: Los puntos del cilindro

4. Planar si $dN_p = 0$
   Ejemplo: Los puntos de cualquier plano.

3. Primer y segunda formas fundamentales

3.1. Primera forma fundamental

Se denomina primera forma fundamental de una superficie Σ, en un punto p, a la aplicación bilineal, simétrica y definida positiva I_p dada de la siguiente forma:

$$\begin{gathered} I_p : T_p(\Sigma) \times T_p(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto I_p(u, v) = \langle u, v \rangle \end{gathered}$$

La cual tiene una representación matricial, que a continuación se define.

3.1.1 Definición. Se define la primera forma fundamental de la superficie Σ en el punto p como la matriz (del producto escalar en el espacio tangente):

$$I_p(u,v) = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \rangle & \langle \frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \rangle \\ \\ \langle \frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \rangle & \langle \frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \rangle \end{pmatrix}$$

3.1.2 Ejemplo. (Toro) El toro, con la parametrización:

$$x(\theta, \varphi) = ((a + r\cos\theta)\cos\varphi, (a + r\cos\theta)\sin\varphi, r\sin\theta)$$

con $0 < \theta < 2\pi$ y $0 < \varphi < 2\pi$ y dado que:

$x_\theta = (-r\sin\theta\cos\varphi, -r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$
$x_\varphi = (-(a + r\cos\theta)\sin\varphi, (a + r\cos\theta)\cos\varphi, 0)$ se tiene que:

$\langle x_\theta, x_\theta \rangle = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta = r^2$
$\langle x_\theta, x_\varphi \rangle = 0$
$\langle x_\varphi, x_\varphi \rangle = (a + r\cos\theta)^2\sin^2\varphi + (a + r\cos\theta)^2\cos^2\varphi = (a + r\cos\theta)^2$

Así, la primera forma fundamental del toro queda expresada de la forma:

$$\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (a + r\cos\theta)^2 \end{pmatrix}$$

3.2. Segunda forma fundamental

Se denomina segunda forma fundamental de una superficie Σ, en un punto p, a la aplicación bilineal y simétrica II_p dada de la siguiente forma:

$$II_p : T_p(\Sigma) \times T_p(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \mapsto II_p(u,v) = \langle dN_p u, v \rangle$$

La segunda forma fundamental está bien definida en cada $p \in \Sigma$ y el signo proviene de la elección local de la normal.
A continuación se su expresión en forma matricial.

3.2.1 Definición. Consideremos una parametrización $x : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de una superficie Σ de $\mathbb{R}^3$, para cada punto $p = x(u,v)$ de Σ, la forma cuadrática (forma bilineal) II, definida en $T_p(\Sigma)$ por:

$$II_p(u,v) = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial N}{\partial u}(u,v)\rangle & \langle \frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial N}{\partial v}(u,v)\rangle \\ \\ \langle \frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial N}{\partial u}(u,v)\rangle & \langle \frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial N}{\partial v}(u,v)\rangle \end{pmatrix}$$

Para dar una interpretación de la segunda forma fundamental en un punto p, vamos a considerar una curva regular $c \subset \Sigma$, parametrizada por $\alpha(s)$, donde s es la longitud de arco de c y se tiene $\alpha(0) = p$. Si denotamos por $N(s)$ la restricción del vector normal a la curva $\alpha(s)$, tenemos $\langle N(s), \alpha(s)\rangle = 0$. Así:

$$\langle N(s), \alpha''(s), \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s)\rangle$$

por tanto

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0)\rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0)\rangle \\ &= \langle N(0), \alpha''(0)\rangle \\ &= \langle N, kn\rangle(p) \\ &= k_n(p) \end{aligned}$$

El valor de la segunda forma fundamental II_p para un vector unitario en el espacio tangente es igual a la curvatura normal de una curva que pasa por p tangente al vector unitario mencionado.

4. Teorema de Gauss-Bonnet

4.0.1 Teorema. *Sea $R \subset \Sigma$ una región regular de una superficie orientada y sean $C_1, ...C_n$ las curvas regulares, cerradas, simples a trozos que forman la frontera ∂R de R. Supongamos que cada C_i es positivamente orientada, y sean $\theta_1, ...\theta_p$ es conjunto de todos los ángulos externos de las curvas $C_1, ...C_n$. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s)ds + \int\int_R k d\sigma + \sum_{i=1}^{p} \theta_i = 2\pi\chi(R)$$

donde s denota la longitud de arco de C_i y la integral sobre C_i significa la suma de integrales en cada arco regular de C_i.

Podemos ver que el miembro de la derecha es completamente de aspecto topológico mientras que cada sumando de la izquierda depende de geometría.

En la geometría intrínseca de Σ la única curvatura visible es la curvatura geódesica, esta está ligada a la curvatura gaussiana mediante dicho teorema.

En este teorema se generaliza la idea de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es π, una propiedad clásica de la geometría plana, si el tríangulo es esférico es mayor a π y si el triángulo es hiperbólico es menor a π, con ayuda de los conceptos de geometría anteriormente presentados.

Para entender el teorema aun faltan por conocer más conceptos, en este verano de investigación, solo pude llegar hasta la siguiente definición, pero quedé enganchada a seguir leyendo al respecto.

4.3.2 Definición. Sea Σ una superficie regular $\alpha : I \longrightarrow \Sigma$ una curva parametrizada por longitud de arco, en cada punto $\alpha(s)$ podemos considerar el triedro de Darboux $\{t(s) = \alpha'(s), J\alpha'(s) = N(s) \wedge \alpha'(s), N(s)\}$. Como $|t(s)| = 1$, entonces $\alpha''(s) = t'(s)$ es ortogonal a $t(s)$, y por tanto, $\alpha''(s) \in span\{J\alpha'(s), N(s)\}$. En consecuencia, $\alpha''(s) = \langle\alpha''(s), J\alpha'(s)\rangle + k_n(\alpha'(s), \alpha(s))N(s)$, siendo el coeficiente de $J\alpha'(s)$ la curvatura geódesica de α en $\alpha(s)$.

$$k_g = \langle\alpha''(s), J\alpha'(s)\rangle = \langle\alpha''(s), N(s) \wedge \alpha'(s)\rangle$$

donde J es la rotación positiva de ángulo $\pi/2$.

De aquí ya estamos cerca de poder entender de qué nos hable este interesante teorema.

Referencias

[1] Manfredo P. do Carmo, Gemotría diferencial de curvas y superficies.

Norma Angélica Zavaleta García