Instituto de Matemáticas
Unidad Cuernavaca

Tercer verano de la investigación en matemáticas 2018:

Geometría proyectiva

Alumno: Barraza Sanchez Angel Uriel

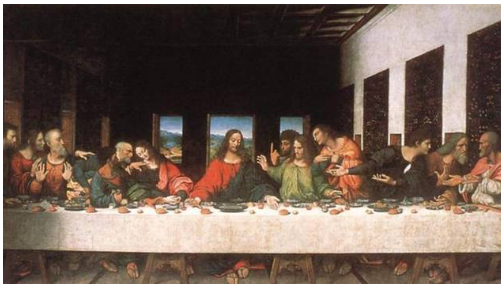
Profesor encargado:
Dr. Ángel Cano Cordero

Agradecimientos:

Se agradece apoyo económico para el desarrollo del presente proyecto al: Proyecto FORDECYT 265667 "Programa para un avance global e integrado de la Matemática Mexicana

Motivación historica

La geometría proyectiva puede entenderse como la geometría que se obtiene cuando nos colocamos en un punto, mirando desde ese punto. Esto es, cualquier linea que incide a nuestro ojo nos parece ser solo un punto en el plano proyectivo ya que nuestro ojo no es capaz de "ver"detrás.



Tiene sus orígenes en la pintura del renacimiento; los pintores renacentistas fundamentan esta rama de las matemáticas al conseguir plasmar en lienzos planos, objetos con volumen, a diferencia de sus antesesores en la edad media. En el renacimiento se estudia la visión que tiene nuestro ojo al ver el mismo objeto desde distintos puntos de vista, es aquí donde nace la perspectiva y las proyecciones.
La geometría proyectiva nace de dos conceptos basicos: dos puntos definen una única recta y cualesquiera dos rectas distintas se intesectan en un punto (si dos rectas son paralelas, estas se van a intersectar en un punto en el infinito), entonces un espacio proyectivo consiste en un espacio afín en el que hemos añadido un conjunto de puntos infinitos, de modo que cualesquiera dos rectas distintas se cortaran siempre en algún punto.

Los matemáticos destacados en el inicio de esta área son Gérard Desargues (1591-1661), Blaise Pascal (1623-1662) y Phelippe de Hire (1649-1718), continuo con Jean Poncelet (1788-1867) cuyo principal aporte fue el "principio de dualidad", August Mobius (1790-1868) introduciendo las coordenadas homogéneas en la geometría proyectiv y Von Staudt (1798-1867) fue conocido por trabajar en geometría proyectiva sin usar nociones de métrica.

Definiciones básicas

Es importante aclarar que a lo largo de este trabajo estamos aceptando (y usando de manera fuerte) el axioma de elección, ya que si no lo aceptamos la mayor parte de los resultados no serán posibles.

Definición 1. (Relación de equivalencia)
Sea $\mathbf{K}$ un conjunto dado no vacío y $\Re$ una relación binaria definida sobre $\mathbf{K}$. Se dice que $\Re$ es una relación de equivalencia si cumple las siguientes propiedades:
Reflexividad: Todo elemento de K está relacionado consigo mismo. Es decir, $\forall x \in \mathbf{K} : x\Re x$
Simetría: Si un elemento de $\mathbf{K}$ está relacionado con otro, entonces ese otro elemento también se relaciona con el primero. Es decir,
$\forall x, y \in \mathbf{K} : x\Re y \Rightarrow y\Re x.$
Transitividad: Si un elemento de $\mathbf{K}$ está relacionado con otro, y ese otro a su vez se relaciona con un tercero, entonces el primero estará relacionado también con este último. Es decir
$\forall x, y, z \in \mathbf{K} : x\Re y \bigwedge y\Re z \Rightarrow x\Re z.$

Ejemplo 1. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ el conjunto de todos los naturales y consideremos el conjunto $\mathbb{N}X\mathbb{N}$, que consiste en todas las parejas ordenadas de números naturales
$\mathbb{N}X\mathbb{N} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$
donde ordenadas quiere decir que $(2, 4)$ no es igual que $(4, 2)$
Definamos la relación de equivalencia $(a, b) \sim (c, d)$ si y solo si $ad = bc$.

Definición 2. (aplicación cociente):
$[\ ] : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
$x \mapsto [x]$

Definición 3. (Subespacio proyectivo)
Sea $w \subset \mathbf{RP}^n, w$ es un subespacio proyectivo si y solo si $[\ ]^{-1}(w) \cup \{0\}$ es un subespacio lineal de dimensión $K + 1$

Nota
Si $dimW = 0$ entonces W se llama punto
Si $dimW = 1$ entonces W se llama linea
Si $dimW = n - 1$ entonces W se llama hiperplano

Definición 4. (Espacio Proyectivo):
El espacio proyectivo real, $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ se define por

$$\mathbf{P}^n(\mathbf{R}^{n+1}\ \{0\})/\sim$$

con la relacion de equivalencia $(x_0, ..., x_n) \sim (\lambda x_0, ..., \lambda x_n)$, donde λ es un número real arbitrario distinto de cero. Equivalentemente, es el conjunto de todas las rectas en $\mathbf{R}^{n+1}$ que pasan a traveś del origen $0 := (0, ..., 0)$.

Tomando los números complejos se obtiene el espacio proyectivo complejo $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Si n es uno o dos, se puede llamar recta proyectiva o plano proyectivo, respectivamente. El plano proyectivo complejo es también llamado esfera de Riemann.
Como en el caso especial de arriba, la notacion (también llamada coordenadas homogéneas) para un punto en el espacio proyectivo es: $[x_0 : ... : x_n]$

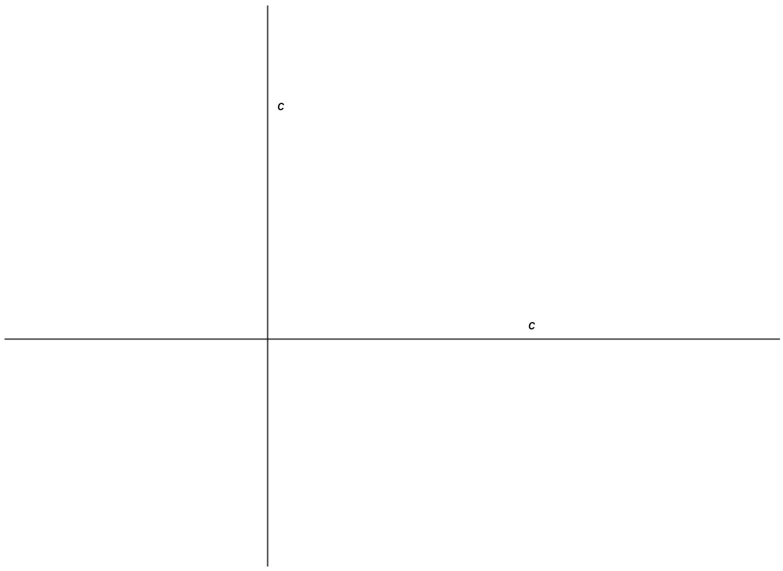
Teorema 1. *(extensión lineal para* R^3*):*
Dado $f : \{e_1, e_2, e_3\} \to \mathrm{R}$ *entonces existe una única función* $F = \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ *lineal tal que* $F(e_i) = f(e_i)$ *para toda* i*. Más aun,* $F(x, y, z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$

Teorema 2. *(extensión lineal):*
Sea V *un* K*-espacio vectorial de* $dim(n)$ *y* $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *una base de* V *y* $f : \beta \to V$ *una función, entonces existe una únca función* $F : V \to V$ *lineal tal que* $F(v_i) = f(v_i)$*. Más aun,* $F(\sum_1^n \alpha_i v_i) = \sum_1^n \alpha_i f(v_i)$

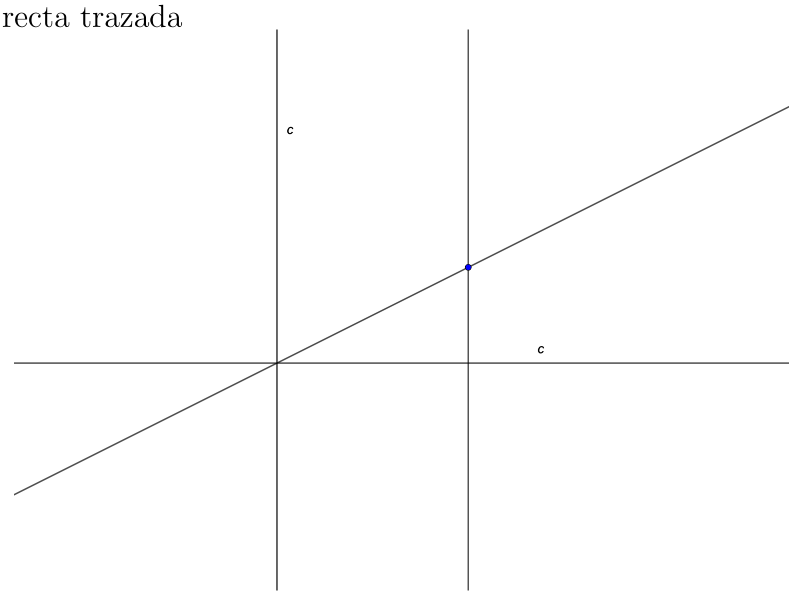
Visualisación de algunos espacios proyectivos

Esfera de Riemann

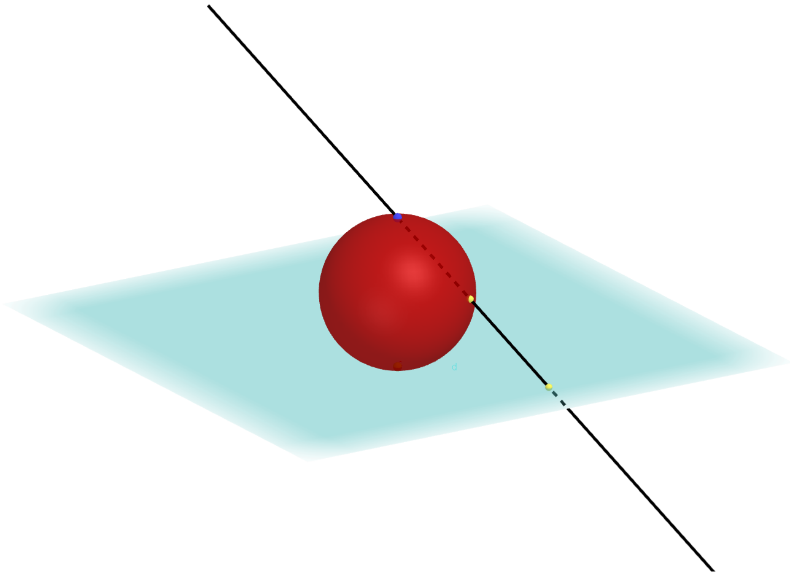
Consideremos el espacio proyectivo $P^2(\mathbb{C})$ mejor conocido como la esfera de Riemman, abusando un poco de lo que podemos dibujar consideremos el siguiente plano:



donde cada eje es una recta compleja, entonces si trazamos una recta paralela al eje horizontal y consideramos el conjunto de rectas que pasan por el origen, tendremos que existe una infinidad de puntos de intersección con la recta trazada

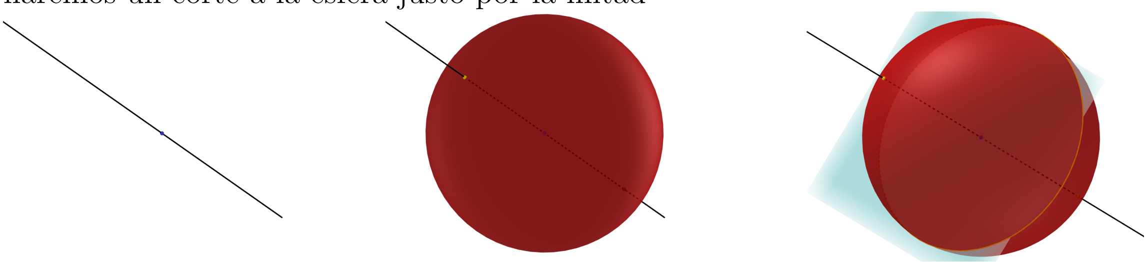


Sin embargo existe una recta que pasa por el oringen y no intersecta la recta paralela al eje. Si nosotros agregamos un punto en el infinito de tal forma en que el eje y la recta dejen de ser paralelas, tendremos la famosa esfera de Riemann

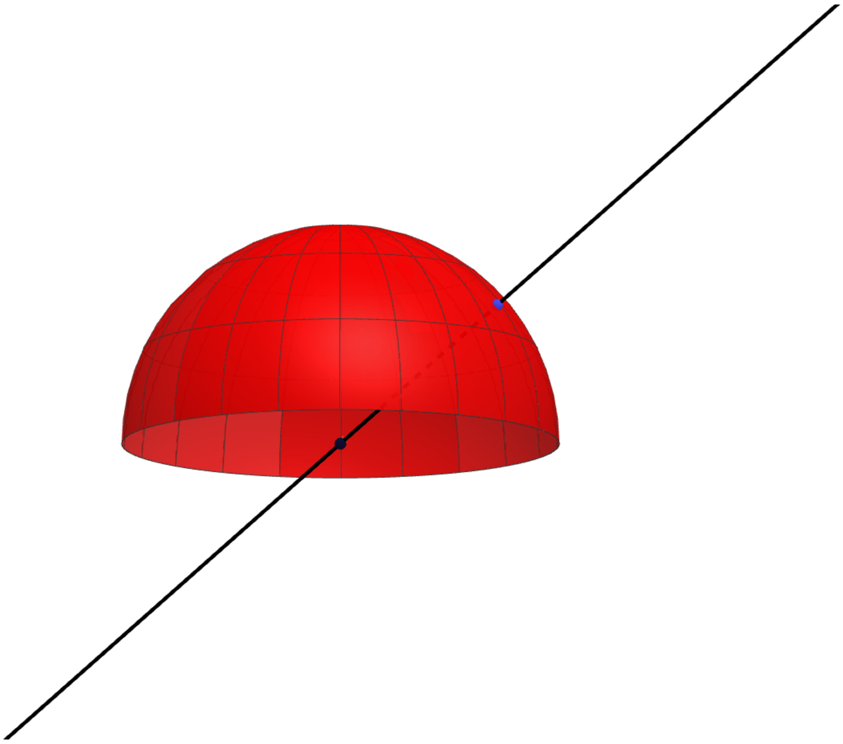


Plano proyectivo real

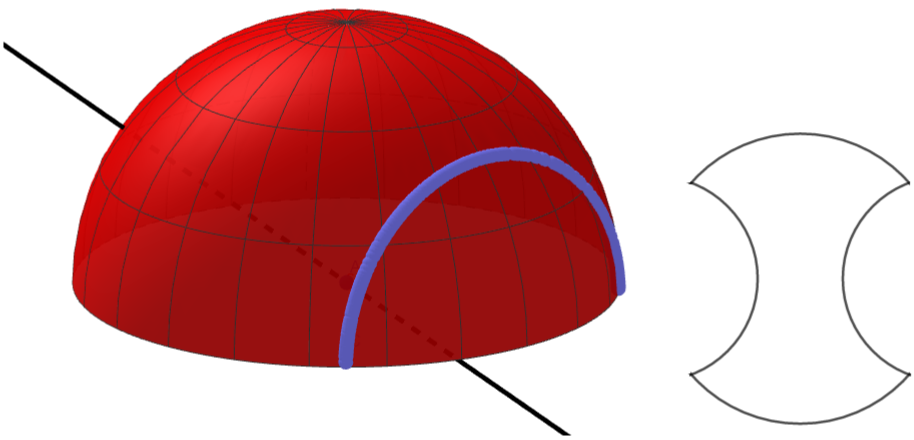
Consideremos el conjunto de todas las rectas que pasan por el oringen en $\mathbb{R}^3$, podemos notar que hay una infinidad de maneras de ver una misma recta; para tener un sistema de coordenadas bien definido vamos a considerar los puntos de intersección de las rectas con la esfera unitaria con centro en el origen. Pero aún tendremos el problema que para cada punto existe otro igual pero de signo opuesto en su antipodo; para solucionar el problema haremos un corte a la esfera justo por la mitad



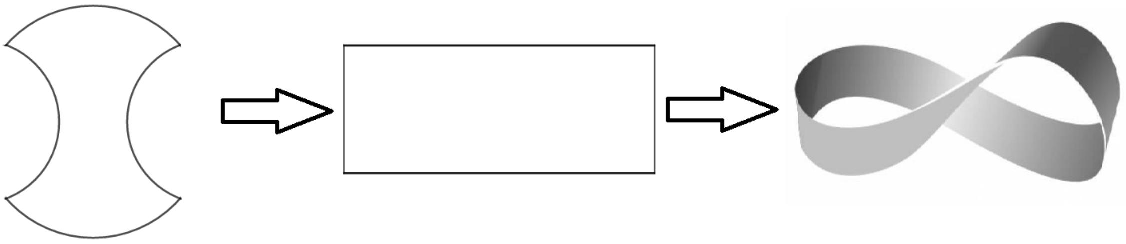
Ahora que tenemos un casquete nos daremos cuenta que el único problema que nos queda es en la sección que cortamos (la base en forma de circunferencia)



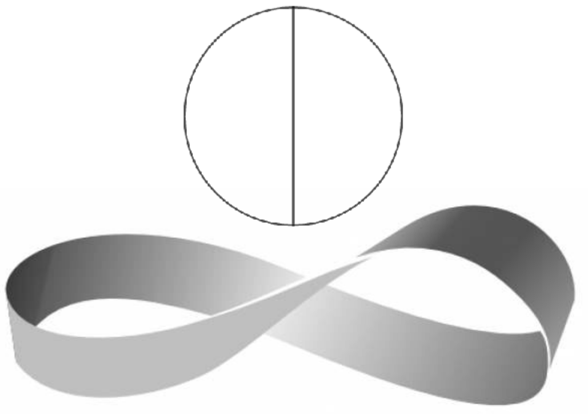
Para solucionarlo, primero deberemos hacer un corte en forma de media circunferencia que empiece en la base de nuestro casquete y otro corte exactamente igual del lado opuesto. Podemos tomarnos la mayor parte como la figura vista acontinuación.



De la topología sabemos que la figura restante podemos verla como una banda de Moebius



Recordemos que del casquete habiamos hecho un corte, si ”pegamos.ªmbas medias circunferencias tendremos una circunferencia, la cual podemos hacer que su frontera coincida con la banda de Moebius



Así conseguimos tener una visualización adecuada para el plano proyectivo. A partir de este momento todos los resultados, definiciones y demostraciones se darán para el caso del plano proyectivo para facilitar la comprensión de los mismos, más adelante se volverán a enunciar de manera general

Proposición 1. *Dado dos puntos distintos cualesquiera, existe una única recta que pasa por ella.*

Demostración. Sea $x, y \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R}^3 \backslash \{0\})$ puntos distintos y sea u, v vectores que los representan. Entonces u, v son linealmente independientes o de lo contrario $u = \lambda v$ y

$$x = [u] = [\lambda v] = [v] = y$$

Sea $U \subseteq \mathbf{R}^3$ un plano que contiene a u y v, entonces $\mathbf{P}(U) \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{R}^3)$ es una recta proyectiva que contiene a x, y.
Supongamos $\exists \mathbf{P}_2(U') \subseteq \mathbf{P}_2(\mathbf{R}^3)$ otra recta que contiene a u y v. Notemos que $\mathbf{P}_2(U')$ y $\mathbf{P}_2(U)$ son de dimensión 2, por lo tanto $U = U'$ necesariamente ya que $\mathbf{P}_1(\mathbf{R}^3)$ es de dimensión 3. $\square$

Proposición 2. *En un plano proyectivo, dos rectas distintas intersectan en un único punto.*

Demostración. Sea $\mathbf{P}(U_1), \mathbf{P}(U_2) \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ dos rectas proyectivas distintas. Sabemos que U_1, U_2 tienen dimensión dos, entonces:

$$dim(\mathbf{R}^3) \geq dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2) - dim(U_1 \cap U_2)$$

así

$$3 \geq 2 + 2 - dim(U_1 \cap U_2))$$

y

$$dim(U_1 \cap U_2) \geq 1 \tag{1}$$

pero U_1 y U_2 tienen dimensión 2, entonces

$$dim(U_1 \cap U_2) \leq 2 \tag{2}$$

esto implica que, para que se cumpĺa (1) y (2) $U_1 = U_2$ o $U_1 \cup U_2$ es unidimensional.
Por lo tanto $U_1 = U_2 \subset \mathbf{R}^3$ es una recta en $\mathbf{R}^3$ (un punto proyectivo en $\mathbf{P}^2(\mathbf{R}^3)$) $\square$

Definición 5. Una transformación proyectiva de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R}^3) \to \mathbf{P}^2(\mathbf{R}^3)$ es un mapeo τ definida por una transformación lineal invertible $\tau : V \to W$

Notemos que si $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda\tau$ y τ define la misma transformación lineal

$$[(\lambda\tau)(v)] = [\lambda(\tau(v))] = [\tau(v)]$$

Definición 6. Sea $\mathbf{P}^2(\mathbf{R}^3)$ un espacio proyectivo, entonces 4 puntos en $\mathbf{P}^2(\mathbf{R}^3)$ se dice que están en posición general si cada subconjunto de 3 puntos tiene vectores representativos en $\mathbf{R}^3$ que son linealmente independientes

Ejemplo 2. Si tomamos dos rectas proyectivas distintas, podemos tomar un punto en cada recta distintos al punto de intersección, el punto de intersección, consideremos la recta que une a nuestros primeros dos puntos y con cualquier otro punto fuera de las 3 rectas tendremos 4 puntos en posición general

Teorema 3. *Si $X_1, ..., X_4$ están en posición general en $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{R}^3)$ y $Y_1, ...Y_4$ están en posición general, entonces hay una única transformación proyectiva $\tau : \boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{R}^3) \to \boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{R}^3)$ tal que $\tau(X_i) = Y_i, \forall i \in [1, 4]$*

Demostración. Primero elegimos los vectores representativos $v_1, ..., v_4 \in \mathbf{R}^3$ para los puntos $X_1, ..., X_4$ en $\mathbf{P}^2(\mathbf{R}^3)$
Por posición general los primeros 3 vectores son linealmente independientes, por lo que forman una base para $\mathbf{R}^3$ y hay escalares λ_i tal que

$$v_4 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i \tag{3}$$

Si $\lambda_i = 0$ para algún i, entonces (3) nos dice la relación entro los primeros 3 vectores, lo cual no es posible por definición de posición general, deducimos $\lambda_i \neq 0 \forall i$. Esto significa que para cada $\lambda_i v_i$ es también un vector representativo para X_i, por lo que (3) nos dice que podríamos haber elegido vectores v_i tal manera que

$$v_4 = \sum_{i=1}^{3} v_i \tag{4}$$

Además, dado v_4, v_i son únicos para

$$\sum_{i=1}^{3} v_i = \sum_{i=1}^{3} \mu_i v_i$$

implica $\mu_i = 1$ desde v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes Ahora podemos elegir $Y_1, ..., Y_4$ en $\mathbf{P}^2(\mathbf{R}^3)$ y elegimos los vectores representativos tales que

$$w_4 = \sum_{i=1}^{3} w_i \tag{5}$$

ya que v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes, forman una base para $\mathbf{R}^3$, entonces tenemos una transformación lineal única $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(v_i = w_i$ para $i = 1, 2, 3$ además w_1, w_2, w_3 son linealmente independientes, T es invertible. Además por (4) y (5)

$$T(v_4) = \sum_{i=1}^{3} T(v_i) = \sum_{i=1}^{3} w_i = w_4$$

y entonces T define una transformación proyectiva τ tal que $\tau(X_i) = Y_i \forall v_i, i = 1, ..., 4$

Para demostrar la unicidad supongamos que T' define otra transformación τ' con esta misma propiedad. Entonces $T'(v_i) = \mu_i w_i$ y

$$\mu_4 w_4 = T'(v_4) = \sum_{i=1}^{3} T'(v_i) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i w_i$$

pero la representación (5) es única, nosotros tenemos $\dfrac{\mu_i}{\mu_4} = 1$, por lo tanto $T'(v_i) = \mu_4 T(v_i)$ y $\tau' = \tau$ $\square$

Teoremas más importantes en geometría proyectiva

Dos de los teoremas clásicos en la geometría proyectiva son el teorema de Desargues y el teorema de Pappus, su importancia radica principalmente en el teorema fundamental de la geometría proyectiva, el cual trata de geometrías de incidencia

Para facilitar la compresión de los siguientes dos teoremas, será necesario definir la siguiente notación.

Definición 7. Sea $a = (x_1, y_1, z_1), b = (x_2, y_2, z_2), c = (x_3, y_3, z_3)$ vectores en $\mathbf{R}^3$,entonces

$$det(a, b, c) := \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

Teorema 4. *(Desargues) Sea A, B, C, A', B', C' puntos distintos en el plano proyectivo $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{R}^3)$ tal que las rectas AA', BB', CC' son distintas y concurrentes en un punto P. Entonces los 3 puntos de intersección $AB \cap A'B', AC \cap A'C', BC \cap B'C'$ son colineales.*

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos fijar 4 puntos que esten en posición general por simplicidad, el resultado seguirá siendo válido ya que con esos puntos podemos generar los 4 puntos originales, solo van a diferir en una constante, entonces fijemos $a = (1, 0, 0), p = (0, 1, 0), b = (0, 0, 1), c' = (1, 1, 1)$ vectores que representen A, P, B, C' respectivamente e $i = (x, y, z)$, $\{a, p, b, c'\}$ están en posición general. Notemos que para facilitar aun más las cosas podemos pensar que trabajamos en $\mathbb{R}^3$
Recordando que A', B', C son rectas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^3$ podemos deducir la forma de los vectores a', b', c (representantes de A', B', C respectivamente), de la siguiente manera:

Si $det(i, a, p) = 0$ entonces $z = 0$, esto implica que la entrada en x y y sea libre mientras z es estrictamente igual a 0.
Siguiendo el razonamiento anterior se tiene que $b' = (0, \alpha', \beta')$ y $c = (k, \gamma, k)$
La interpretación que le daremos al hecho de que $a' = (\alpha, \beta, 0)$ será

$$\begin{gathered} x = \alpha t \\ y = \beta t \\ z = 0 \\ \text{donde } t \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

Ahora con las coordenadas de nuestras rectas (puntos proyectivos) podemos deducir la ecuación de algunos planos en $\mathbb{R}$ (estas serán nuestras rectas proyectivas mencionadas en el teorema), comenzaremos calculando el plano generado por la recta b y c

$$\text{Si } det(i, b, c) = 0 \text{ entonces } ky - \gamma x = 0$$

y repetimos el procedimiento con las otras rectas proyectivas que necesitamos.

Si $det(i, b', c') = 0$ entonces $(\alpha' - \beta')x + \beta' y - \alpha' z = 0$
Si $det(i, a, c) = 0$ entonces $\gamma z - ky = 0$
Si $det(i, a', c') = 0$ entonces $\beta x - \alpha y + (\alpha - \beta)z = 0$
Si $det(i, a, b) = 0$ entonces $-y = 0$
Si $det(i, a', b') = 0$ entonces $\beta\beta' x - \alpha\beta' y + \alpha\alpha' z = 0$

Entonces si $a'' = BC \cap B'C'$, $b'' = AC \cap A'C'$, $c'' = AB \cap A'B'$, se tienen la ecuación de los 3 puntos proyectivos de intersección (rectas en $\mathbb{R}^3$) mencionados en el teorema

$$a'' = \begin{cases} ky - \gamma x = 0 \\ \\ (\alpha' - \beta')x + \beta' y - \alpha' z = 0 \end{cases}$$
$$b'' = \begin{cases} \gamma z - ky = 0 \\ \\ \\ betax - \alpha y + (\alpha - \beta)z = 0 \end{cases}$$
$$c'' = \begin{cases} -y = 0 \\ \\ \beta\beta' x - \alpha\beta' y + \alpha\alpha' z = 0 \end{cases}$$

Entonces, solo nos resta obtener la ecuación de la recta proyectiva que une el punto a'' con c'' y la recta proyectiva que une b'' y c'', si resultan ser la misma, a'', b'', c'' serán colineales.

En efecto, dada la recta a'' podemos pasar la ecuación a su forma paramétrica:

$$a'' = \begin{cases} x = t \\ \\ y = \frac{\gamma}{k} t \\ \\ z = \left(1 - \frac{\beta'}{\alpha'} + \frac{\beta'\gamma}{k\alpha'}\right) t \end{cases}$$

conseguimos la forma paramétrica de b'' y c'' con ellas obtenemos los vectores dirección que representa cada recta

$$v_a = \left(1, \frac{\gamma}{k}, 1 - \frac{\beta'}{\gamma'} + \frac{\beta'\gamma}{k\alpha'}\right),$$
$$v_b = \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha k}{\gamma\beta} + \frac{k}{\gamma}, 1, \frac{k}{\gamma}\right),$$

$$v_c = \left(1, 0, -\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}\right)$$

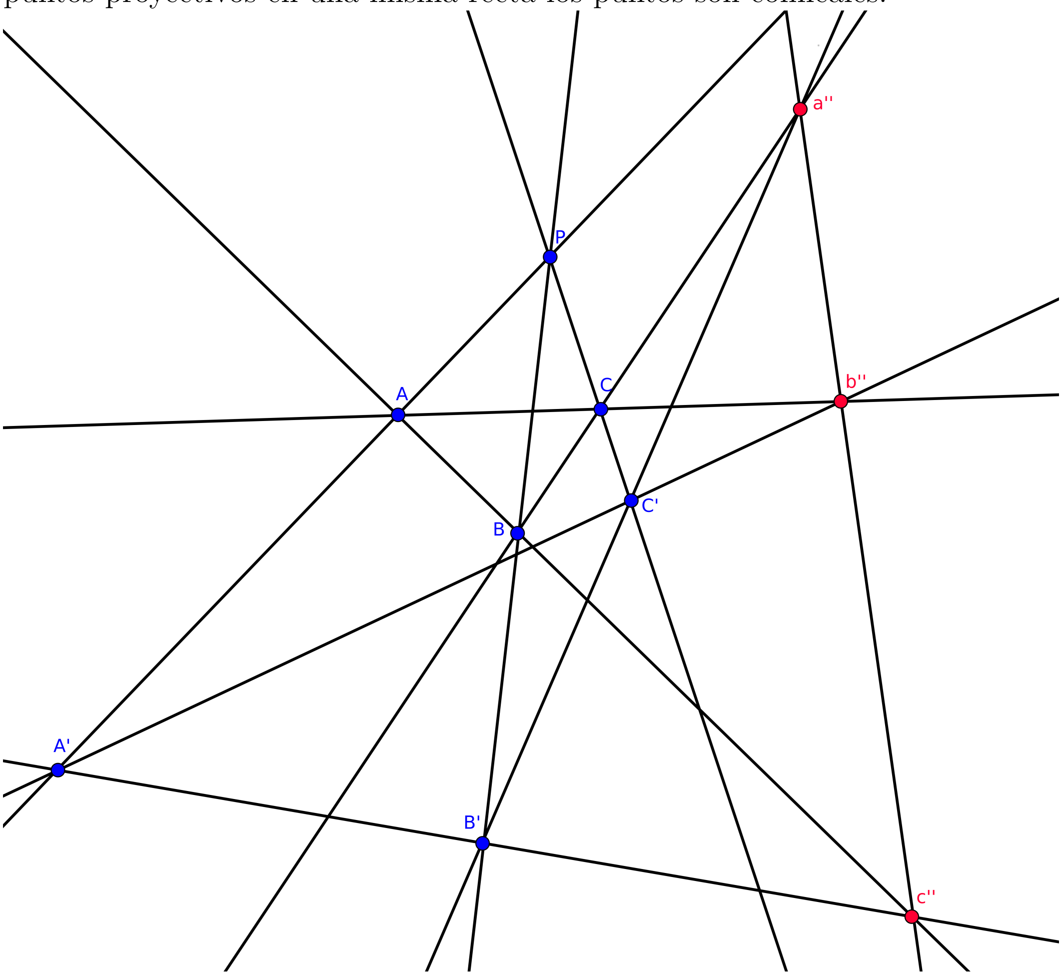
$det(i, v_a, v_c) = 0$ entonces

$$\frac{-\beta\beta'\gamma}{\alpha\alpha' k}x - (-1 - \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} + \frac{\beta'}{\alpha'} - \frac{\beta'\gamma}{k\alpha'})y - \frac{\gamma}{k}z = 0$$

$det(i, v_b, v_c) = 0$ entonces

$$(\frac{k}{\gamma})(\frac{-\beta\beta'\gamma}{\alpha\alpha' k}x - (-1 - \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} + \frac{\beta'}{\alpha'} - \frac{\beta'\gamma}{k\alpha'})y - \frac{\gamma}{k}z) = 0$$

Por tanto, al ser el mismo plano (que difieren por solo una constante) tenemos que pasan por la misma recta proyectiva, entonces al estar los 3 puntos proyectivos en una misma recta los puntos son colineales.



□

Teorema 5. *(Pappus) Sea A, B, C y A', B', C' dos pares de tres puntos colineales distintos en el plano proyectivo $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{R}^3)$. Entonces los puntos $BC' \cap B'C, CA' \cap C'A, AB' \cap A'B$ son colineales*

La siguiente demostración se sigue de la demostración anterior.

Demostración. Sin perdida de generalidad, fijemos $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $b' = (1, 1, 1)$, $c' = (0, 0, 1)$ vectores que representan A, B, B', C' respectivamente e $i = (x, y, z)$. Entonces $\{a, b, b', c'\}$ están en posición general.
Podemos deducir la forma de los vectores c, a'

Si $det(i, a, b) = 0$ entonces $z = 0$ esto implica que x, y sean libres
$c = (\alpha, \beta, 0)$
Si $det(i, b', c') = 0$ entonces $x = y$ esto implica que z es libre mientras que
x, y serán libres e iguales $a' = (\gamma, \gamma, \delta)$

Ahora podemos deducir la ecuación de algunos planos en $\mathbf{R}^3$:
El plano generado por el vector a y b' se obtiene de calcular $det(i, a, b') = 0$, entonces $z - y = 0$
Repitiendo el razonamiento anterior conseguimos los siguientes planos:

$$
\begin{gathered}
a'b\colon \gamma z - \delta x = 0 \\
ac'\colon -y = 0 \\
a'c\colon (\beta\gamma - \alpha\gamma)z + \alpha\delta y - \beta\delta x = 0 \\
bc'\colon x = 0 \\
b'c\colon (\beta - \alpha)z + \alpha y - \beta x = 0
\end{gathered}
$$

Si hacemos c'' la recta de intersección por el plano AB' y $A'B$, b'' la recta de intersección por el plano AC' y $A'C$, a'' la recta de intersección por el plano BC' y $B'C$ podemos cambiar la expresion a su furma paramétrica para despues conseguir los vectores dirección v_a,v_b,v_c que nos ayudarán a terminar la demostración.

$$
\begin{gathered}
v_a = \left(0, 1, \frac{-\alpha}{\beta - \alpha}\right) \\
v_b = \left(1, 0, \frac{\beta\delta}{\beta\gamma - \alpha\gamma}\right) \\
v_c = \left(\frac{\gamma}{\delta}, 1, 1\right)
\end{gathered}
$$

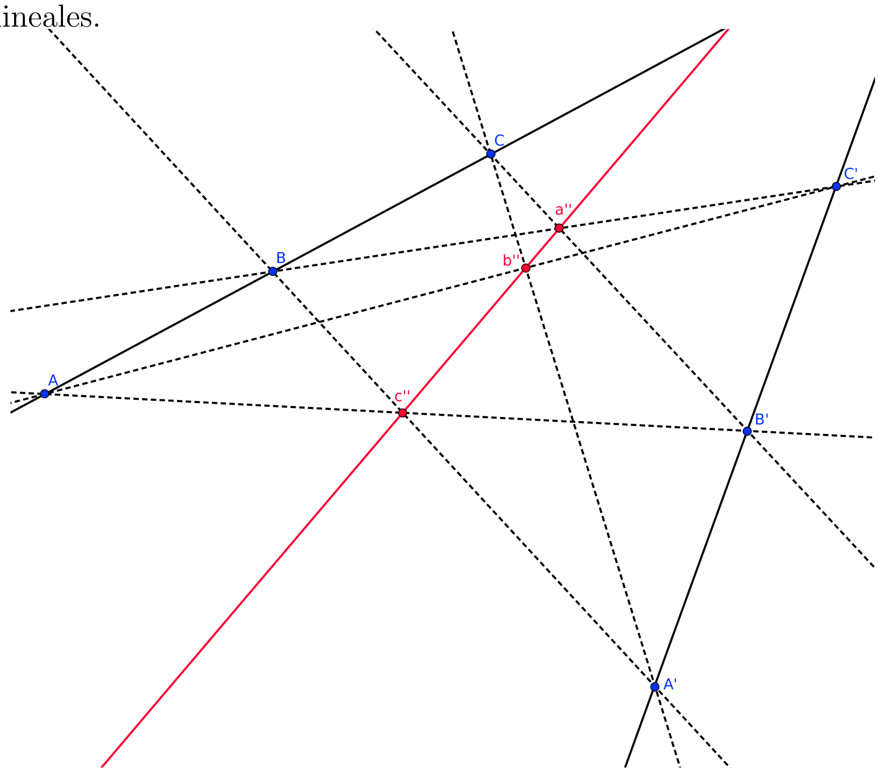
Entonces el plano generado por v_b, v_c

$$= -z - \left(\frac{\beta\delta\gamma}{(\beta\gamma - \alpha\gamma)} - 1 \right) y + \left(\frac{\beta\delta}{\beta\gamma - \alpha\gamma} \right) x = 0$$

Y el plano generado por v_a, v_c

$$= \left(\frac{-\gamma}{\delta} \right) \left(-z - \left(\frac{\beta\delta\gamma}{(\beta\gamma - \alpha\gamma)} - 1 \right) y + \left(\frac{\beta\delta}{\beta\gamma - \alpha\gamma} \right) x \right) = 0$$

Por lo tanto, al ser el mismo plano en $\mathbf{R}^3$, los puntos proyectivos son colineales.



$\square$

Dualidad

- Dado un espacio vectorial de dimensión finita V sobre un campo $\mathbb{F}$ el espacio dual V' es el espacio vectorial de las transformaciones lineales $f : V \to \mathbb{F}$

- Si $v_1, ..., v_n$ es una base para V, hay una base dual $f_1, ..., f_n$ de V' caracterizado por la propiedad $f_i(v_j) = 1$ si $i = j$ y $f_i(v_j) = 0$ en otro caso.

- Si $T : V \to W$ es una transformación lineal hay una transformacion lineal natural $T' : w' \to V'$ definida oir $T'f(v) = f(T(v))$

Definición 8. Sea $U \subseteq V$ un subespacio vectorial. El aniquilador $U^\circ \subset V'$ está definido por $U^\circ \{f \in V' : f(u) = 0 \forall u \in U\}$ (el aniquilador, claramente es un subespacio vectorial).

Proposición 3. $dim(U) + dim(U^\circ) = dim(V)$

Para la demostración vamos a considerar el caso en que $V = \mathbb{R}^3$, el caso general se sigue de manera analoga.

Demostración. Sea u_1, u_2 vectores que general un plano U en el espacio. Sea v_1 un vector tal que u_1, u_2, v_1 son una base para $\mathbb{R}^3$. Sea f_1, f_2, f_3 una base dual, entonces para $2 \leq i \leq 3$, $f_i(u_i) = 0$ por lo que f_i pertenece a U°.
Por lo contrario, si f pertenece a U°, escribimos:

$$f = \sum_{i=1}^{3} c_i f_i$$

entonces $0 = f(u_i) = c_i$, asi que f es una combinación lineal de f_i para $1 \leq i \leq 3$.
Entonces f_3 es una base para U° y

$$dim(U) + dim(U^\circ) = 2 + 3 - 2 = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$$

□

Si nosotros tomamos el espacio dual del espacio dual, tendremos el espacio vectorial V'', pero es naturalmente un isomorfismo de V en si mismo

$$S : V \to V''$$
$$Sv(f) = f(v)$$

Proposición 4. *Los puntos del espacio proyectivo dual $P(V')$ de un espacio proyectivo $P(V)$ estan en natural correspondencia uno a uno con los hiperplanos en $P(V)$*

Demostración. Sea

$$\tau : P(V') \to Gr(1,2)$$
$$[f] \mapsto [Ker(f)\ \{0\}]$$

Inyectividad:

$\psi([f]) = \psi([g])$ entonces $[f] = [g]$ esto ímplica $f = \alpha g$, por lo tanto $Ker(f) = Ker(g)$

Sobreyectividad

Sea $l \in Gr(1,2)$ entonces existe P (un plano) contenido en V tal que si $[P \setminus 0] = l$ entonces α, β, γ en $\mathbb{R}$ de tal manera que

$$P = \{(x, y, z) := \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}$$

$$\psi[f] = [Ker(f)\ \{0\}] = [\{(x, y, z) \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}] = [P/0] = l \qquad \square$$

Proposición 5. *Una linea en $\boldsymbol{P}^*(\mathbb{R}^3)$ se puede describir como el conjunto de lineas en $\boldsymbol{P}^*(\mathbb{R}^3)$ que pasan por un mismo punto*

Referencias

Projective Geometry - Nigel Hitchin - Course 2003

Referencias

Projective Geometry - Nigel Hitchin - Course 2003

Ángel

Angel Uriel Barraza Sanchez
Universidad de Sonora