

Grupos y Geometría Hiperbólica.
Grupos hiperbólicos

Héctor Noé Flores Meza
Asesorado por
Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña

10 de agosto de 2018

Agradecimientos:

*Agradezco el apoyo económico para el desarrollo del presente proyecto al:
Proyecto FORDECYT 265667 “Programa para un avance global e
integrado de la Matemática Mexicana”*

Agradezco la dedicación y comprensión al Doctor Luis Jorge Sánchez Saldaña por el apoyo académico recibido. Y al Doctor Carlos Villegas Blas por haberme dado la oportunidad de participar. Gracias.

Índice

1. Introducción	3
2. Grupos Hiperbólicos	3
2.1. La métrica de las palabras	3
2.2. Grafo de Cayley	4
2.3. Espacios hiperbólicos de Gromov	5
2.4. Grupos Hiperbólicos	7
3. El Plano Hiperbólico	8
3.1. El modelo \mathbb{H}	8
3.2. Longitud y distancia en \mathbb{H}	9
3.3. Isometrías	11
4. Transformaciones de Möbius	11
4.1. Grupo de transformaciones de Möbius	11
4.2. Matriz de representación	13
4.3. Preservación de \mathbb{H}	14
5. El interés de subgrupos de $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$	17

1. Introducción

La geometría hiperbólica es la primera de las geometrías no euclidianas que se atribuye a Lobachevsky y Bolyai. Aunque también se atribuye a Gauss, este último nunca lo hizo público. Esta geometría surge al negar el quinto postulado de Euclides, *el postulado de las paralelas*:

Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

A Playfair se le atribuye la forma en que es mejor conocido dicho postulado: *Por un punto exterior a una recta, pasa una única paralela.* En el presente escrito daremos una breve introducción a la geometría hiperbólica, desde un punto de vista más elemental sin mencionar variedades riemannianas.

Una parte de la *teoría geométrica de grupos* son los *grupos hiperbólicos*. Buscamos introducirnos a ellos y buscar la relación con la *geometría hiperbólica*, tratando de mostrar como la teoría en los *grupos hiperbólicos* se encuentra inspirada en la anterior.

2. Grupos Hiperbólicos

2.1. La métrica de las palabras

Sea G un grupo finitamente generado y $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ un conjunto generador de G ; es decir que $G = \langle S \rangle$.

Podemos escribir todo elemento de G como producto de los elementos de S y sus inversos dado que S genera G . Este producto lo podemos ver como una *palabra* donde las letras son los elementos s_i y s_i^{-1} , y la concatenación corresponde al producto del grupo. Una palabra es *reducida* si no tiene una letra y su inversa en lugares consecutivos, entonces toda palabra se puede *reducir* haciendo la cancelación siempre que aparezca $s_i s_i^{-1}$ o $s_i^{-1} s_i$. Por lo tanto, todo elemento de G puede escribirse como una palabra reducida en las letras s_i y s_i^{-1} que vamos a identificar como palabra reducida en S .

2.1.1 Ejemplo. *Un importante ejemplo de esto son los grupos libres. Dado $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de n elementos distintos, $F_n = F(X) = \langle X \rangle$ es el grupo formado por las palabras reducidas en las letras x_i y x_i^{-1} , donde el producto es concatenar y reducir. Recibe el nombre de grupo libre en n generadores. El conjunto X se llama base de F_n .*

Fijemos un grupo G , un conjunto generador $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ y $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ base de F_n . Si tenemos una palabra reducida $w \in F_n$ llamamos $w(s_1, \dots, s_n)$ al elemento de G obtenido sustituyendo a x_i por s_i en w . Si $\gamma \in G$ cumple que $\gamma = w(s_1, \dots, s_n)$, se dice que la palabra reducida w representa a γ . Esta representación es claro que siempre existe y en general no es única la palabra.

2.1.2 Definición. Sea $w \in F_n$, definimos y denotamos el largo de w , por $|w|$ como la cantidad de letras de w .

2.1.3 Definición. Sea $\gamma \in G$, se define el largo de γ respecto a S como

$$l_S(\gamma) = \min\{|w| : w \in F_n, w(s_1, \dots, s_n) = \gamma\}$$

Es decir, el largo de la palabra más corta que representa a γ en el generador S . Resaltamos con el subíndice la dependencia del conjunto generador S .

2.1.4 Definición. De lo anterior se permite la definición de distancia en G como

$$d_S(\gamma_1, \gamma_2) = l_S(\gamma_1^{-1}\gamma_2)$$

Resaltamos con el subíndice la dependencia del conjunto generador S .

Es sencillo verificar que esta definición de distancia induce una métrica en G y que es invariante a izquierda, es decir $d_S(\gamma\gamma_1, \gamma\gamma_2) = d_S(\gamma_1, \gamma_2)$. Si se desea ver más sobre el tema ver [HS]. Esta es la *métrica de las palabras* de G ; respecto al conjunto generador S . Al par (G, S) asocia un espacio métrico (G, d_S) donde G actúa por isometrías. Todo esto, ampliamente depende del conjunto generador S .

2.2. Grafo de Cayley

Una construcción importante en la *teoría geométrica de grupos* para un grupo G y un conjunto generador finito, $S = \{s_1, \dots, s_n\}$; es su *grafo de Cayley* $\text{Cay}(G, S)$. Este grafo tiene como vértices los elementos de G , y las aristas son de la forma $\{\gamma, \gamma s_i\}$ para todo $\gamma \in G$ y $s_i \in S$. Observamos que se ignora la orientación en el grafo y también etiquetas de las aristas, así el conjunto de vértices V y aristas E son

$$V = G \text{ y } E = \{\{\gamma, \gamma s_i\} : \gamma \in G, s_i \in S\}.$$

Remarcamos la dependencia del grafo de Cayley del conjunto generador S . Todo grafo conexo tiene una métrica natural donde cada arista mide 1 siendo isométrico al intervalo $[0, 1]$ y se define la longitud de un camino formado

por aristas sumando lo que mide cada arista. La distancia entre dos puntos es el mínimo de las longitudes de camino que los conectan, a uno de estos caminos llamamos camino mínimo. Dado que S genera G se tiene que el grafo $\text{Cay}(G,S)$ es conexo.

2.2.1 Proposición. *Sea G un grupo finitamente generado y S un conjunto generador de G . Se cumple que la métrica descrita en $\text{Cay}(G,S)$ es la métrica de las palabras en G respecto a S .*

Demostración. (Idea de la demostración) Notemos que cada palabra w en S especifica un camino de aristas en $\text{Cay}(G,S)$ que empieza con 1 y sigue las aristas correspondientes a las letras que aparecen en w en orden sumando las longitudes de cada arista, hasta llegar al vértice $w(s_1, \dots, s_n)$. ■

La principal ventaja del grafo de Cayley sobre (G, d_s) es ser conexo por caminos que nos proporciona una mejor visualización y simplifica lo anterior expuesto.

Ejemplos

1. Para el grupo $G = \mathbb{Z}$, y los conjuntos generadores $S = \{1\}$ y $S = \{2, 3\}$ tenemos los grafos de Cayley respectivamente



2. Para el grupo libre en dos generadores $G = F_2 = \langle a, b \rangle$, y conjunto generador $S = \{a, b\}$ su grafo de Cayley es Figura 1
3. Si $G = \mathbb{Z}^2$, con el conjunto generador $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$ se tiene el grafo de Cayley en Figura 2

2.3. Espacios hiperbólicos de Gromov

2.3.1 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. Una *geodésica* es una inmersión isométrica

$$\alpha: [a, b] \rightarrow X$$

Esto es, que para todos $s, t \in [a, b]$ se cumple que

$$d(\alpha(s), \alpha(t)) = |s - t|.$$

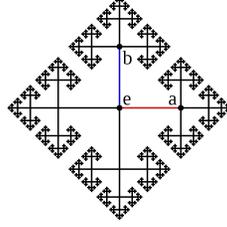


Figura 1: $G = F_2, S = \{a, b\}$

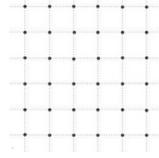


Figura 2: $G = \mathbb{Z}^2, S = \{(0, 1), (1, 0)\}$

2.3.2 Definición. Se dice que el espacio métrico (X, d) es *geodésico* si entre cada par de puntos $x, y \in X$, existe una geodésica

$$\alpha: [0, L] \rightarrow X$$

con $L = d(x, y)$, $\alpha(0) = x$ y $\alpha(L) = y$. Aunque no siempre es única a tal geodésica la denotamos por $[x, y]$

Ejemplo

Sean $x = (x_1, y_1)$ y $y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, y sean $L = d(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, luego $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva paramétrica dada por

$$f(t) = \left(\left(1 - \frac{t}{L}\right)x_1 + \frac{t}{L}x_2, \left(1 - \frac{t}{L}\right)y_1 + \frac{t}{L}y_2 \right)$$

es tal que para todo $s, t \in [0, L]$ se cumple que

$$d(f(s), f(t)) = |s - t|.$$

\therefore El plano euclideo \mathbb{R}^2 con la métrica euclidea es geodésico.

2.3.3 Definición. Un *triángulo geodésico* en (X, d) de vértices $x_1, x_2, x_3 \in X$ es una unión de geodésicas de la forma

$$\Delta = \Delta(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_1]$$

Decimos que las geodésicas son los lados del triángulo.

2.3.4 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. Para $\delta \geq 0$, decimos que un triángulo geodésico \triangle en X de lados A, B, C es δ -delgado si cada lado se encuentra contenido en el δ -entorno de los otros dos. Es decir que $A \subset B_\delta(B \cup C)$ y se debe cumplir para cualquier dos lados que elijamos. Donde $B_\delta(\Omega) = \{x \in X : d(x, \Omega) < \delta\}$, $\Omega \subset X$.

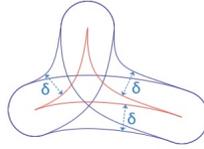


Figura 3: Triángulo δ -delgado.

2.3.5 Definición. Un espacio métrico geodésico (X, d) , se dice que es δ -hiperbólico si todo triángulo geodésico en X es δ -delgado para algún $\delta \geq 0$.

Lo importante no es el valor de δ sino su existencia. Con todo lo anterior un espacio le decimos simplemente *hiperbólico*, según Gromov si es δ -hiperbólico. Existen otras definiciones equivalentes de δ -hiperbólico para espacios no geodésicos, pero no la necesitamos en este escrito.

Ejemplos

1. Si X es de diámetro finito, entonces es δ -hiperbólico con $\delta = \text{diam}(X)$.
2. Si X es un grafo conexo sin circuitos (árbol), entonces es 0-hiperbólico,
3. El *plano hiperbólico* \mathbb{H} que definiremos más adelante.
4. El plano euclideo \mathbb{R}^2 no es un espacio hiperbólico.

2.4. Grupos Hiperbólicos

Hemos asociado a un grupo G con conjunto generador S una métrica d_S en G y un espacio métrico geodésico $\text{Cay}(G, S)$ y hemos recalado la importancia de la elección del conjunto generador S del cual dependen nuestras definiciones. Hay una relación entre los distintos grafos de Cayley asociados a un mismo grupo variando el conjunto generador, está relación es la de *quasi-isometría*. La teoría desarrollada con esta la damos por hecho, a través de quasi-isometrías se prueba que la siguiente definición es independiente del conjunto generador S elegido, para más información ver [NJ].

2.4.1 Definición. Un grupo finitamente generado es *hiperbólico* (según Gromov) si $\text{Cay}(G, S)$ es hiperbólico para algún conjunto generador finito S de G .

Ejemplos

1. Todo grupo finito es hiperbólico.
2. Los grupo libres F_n , y \mathbb{Z} .
3. Por el contrario \mathbb{Z}^n para $n > 1$ no es hiperbólico.

Un interés importante es porque ciertos subgrupos $H \leq PSL(2, \mathbb{R})$, a saber, los grupos *Fuchsianos* son hiperbólicos.

3. El Plano Hiperbólico

Usaremos sólo un modelo del plano hiperbólico conocido como el semiespacio de Poincaré, pero cabe mencionar que existen otros modelos como la representación de Klein o modelo proyectivo del disco, y el modelo del disco de Poincaré, etcétera y todos ellos son equivalentes ver [ME]. Para nuestro fin es más fácil usar el siguiente modelo.

3.1. El modelo \mathbb{H}

3.1.1 Definición. Definimos el plano hiperbólico \mathbb{H} como

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im}(z)\}$$

Usaremos la noción usual de un punto en \mathbb{H} como si fuera de \mathbb{C} . Consideramos también la noción usual de ángulo en \mathbb{H} tal como se tiene en \mathbb{C} , esto es, el *ángulo* entre dos curvas en \mathbb{H} esta definido como el ángulo entre las curvas cuando ellas son consideradas en \mathbb{C} , lo que está definido como el ángulo entre sus rectas tangentes.

Observemos que podemos considerar $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^2$. Vamos a definir la noción de *recta hiperbólica* y algunas veces nos referiremos a ella como simplemente recta y a la recta de la geometría euclidea como recta euclidea.

3.1.2 Definición. Existen aparentemente dos tipos de *rectas hiperbólicas*, ambas definidas en términos de objetos euclidianos en \mathbb{C} . Una de ellas es la intersección de \mathbb{H} con una recta euclidea en \mathbb{C} perpendicular al eje real \mathbb{R} en \mathbb{C} . La otra es, la intersección de \mathbb{H} con una circunferencia euclidea en \mathbb{C} centrada sobre el eje real \mathbb{R} .

A través de geometría analítica es sencillo comprobar lo siguiente.

3.1.3 Proposición. *Para cada par de puntos distintos p y q en \mathbb{H} , existe una única recta hiperbólica l en \mathbb{H} pasando a través de p y q .*

Aunque no hemos definido distancia es natural pensar que la distancia más corta entre dos puntos es lo que mide el segmento de recta que se encuentra entre ellos contenida en la recta única que pasa por ellos.

3.1.4 Definición. Dos rectas en \mathbb{H} son *paralelas* si ellas son disjuntas.
Imagen

Como ya se había mencionado en la geometría euclideana las rectas paralelas son únicas y además equidistantes. Ahora en la geometría hiperbólica, el paralelismo se comporta muy diferente. Aunque todavía no tenemos un significado de medición de distancia hiperbólica, podemos considerar las rectas paralelas cualitativamente. Por construcción es sencillo probar la siguiente propiedad.

3.1.5 Teorema. *Sea l una recta en \mathbb{H} , y sea p un punto en \mathbb{H} que no se encuentra sobre l . Entonces, existen infinitas rectas distintas a través de p que son paralelas a l .*

Si se desea ver la prueba de 3.1.3 y de 3.1.5 se puede revisar en [JA] página 3-4 y [JA] página 5-6 respectivamente.

3.2. Longitud y distancia en \mathbb{H}

Desde la definición de un elemento de longitud de arco del cálculo, se construye la noción de distancia en \mathbb{H} y exploraremos propiedades básicas de esta.

Un camino de clase C^1 en el plano \mathbb{R}^2 es una función $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua sobre $[\alpha, \beta]$ y diferenciable en (α, β) con derivada continua. En coordenadas se puede escribir como $f(t) = (x(t), y(t))$, donde $x(t)$ y $y(t)$ son continuas en $[\alpha, \beta]$ y diferenciables en (α, β) con derivadas continuas. La imagen de un intervalo cerrado bajo un camino f es una curva en \mathbb{R}^2 . Y la longitud de arco euclidiano de dicho camino está dado por $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$. Recordando que $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^2$ tenemos las siguientes definiciones.

3.2.1 Definición. Un camino de a a b para $a, b \in \mathbb{H}$, es un camino de clase C^1 a trozos $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$. Por comodidad a veces escribiremos $f(t) = (x(t), y(t))$

3.2.2 Definición. Se denota y define la *longitud hiperbólica* de $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ como

$$length_{\mathbb{H}}(f) = \int_0^1 \frac{1}{Im(f(t))} |f'(t)| dt$$

Donde $\frac{1}{Im(f(t))} |f'(t)|$ es el elemento de longitud de arco sobre \mathbb{H} . Lo cual nos permitirá definir una distancia y así una métrica en el plano \mathbb{H} .

3.2.3 Definición. La distancia entre dos puntos, $a, b \in \mathbb{H}$, está definida como

$$d_{\mathbb{H}}(a, b) = \inf\{length_{\mathbb{H}}(f) : f \text{ es un camino de } a \text{ a } b\}.$$

3.2.4 Teorema. $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ es un espacio métrico.

Demostración. Sean $a, b, c \in \mathbb{H}$ puntos arbitrarios. Veamos que $d_{\mathbb{H}}$ es una métrica.

1. Dado que para cualquier camino f de a a b $|f'(t)| \geq 0$ y $Im(f(t)) > 0$ entonces, la integral $length_{\mathbb{H}}(f)$ es no negativa. Por tanto $d_{\mathbb{H}}(a, b) \geq 0$. Si $d_{\mathbb{H}}(a, b) = 0$, sean $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$, supongamos que $a \neq b$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $a_1 \neq b_1$. Luego para todo camino f de a a b , $x(t)$ no es constante como $length_{\mathbb{H}}(f) \geq 0$ entonces tiene que ser $a = b$.

Ahora supongamos que $a = b$, entonces el camino constante $f(t) = a$ es un camino que lleva de a a b como $|f'(t)| = 0$ se tiene que $length_{\mathbb{H}}(f) = 0$, de donde $d_{\mathbb{H}}(a, b) = 0$.

2. Cada camino de a a b es también camino de b a a si lo tomamos hacia atrás. Esto es, para cada h en la imagen del camino, con preimagen t , definimos un nuevo camino tomando para h la preimagen $1 - t$. Entonces la preimagen de a es 1 en lugar de 0 la preimagen de b es 0 en lugar de 1, una simple reparametrización. Por lo tanto $d_{\mathbb{H}}(a, b) = d_{\mathbb{H}}(b, a)$
3. Finalmente probaremos que $d_{\mathbb{H}}(a, c) \leq d_{\mathbb{H}}(a, b) + d_{\mathbb{H}}(b, c)$. Supóngase lo contrario, $d_{\mathbb{H}}(a, c) > d_{\mathbb{H}}(a, b) + d_{\mathbb{H}}(b, c)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ $d_{\mathbb{H}}(a, c) = d_{\mathbb{H}}(a, b) + d_{\mathbb{H}}(b, c) + \varepsilon$. Además, existen caminos f_1 de a a b y f_2 de b a c tales que $length_{\mathbb{H}}(f_1) < d_{\mathbb{H}}(a, b) + \frac{\varepsilon}{2}$ y $length_{\mathbb{H}}(f_2) < d_{\mathbb{H}}(b, c) + \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces podemos construir un camino f de a a c por concatenación de f_1 y f_2 y reparametrizándolas. Notar que dicha concatenación es de clase C^1 a trozos. Luego tenemos que $length_{\mathbb{H}}(f) = length_{\mathbb{H}}(f_1) + length_{\mathbb{H}}(f_2) < d_{\mathbb{H}}(a, b) + d_{\mathbb{H}}(b, c) + \varepsilon < d_{\mathbb{H}}(a, c)$, lo cual

no puede ser ya que $d_{\mathbb{H}}(a, c)$ es el ínfimo de todos los caminos desde a a c . Por lo tanto se cumple la desigualdad del triángulo.

Por lo tanto la pareja $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ es un espacio métrico. ■

Cabe mencionar que aquí las geodésicas entre dos puntos x, y son caminos f tal que $d_{\mathbb{H}}(x, y) = \text{length} : \mathbb{H}(f)$, y en este caso son únicas. La distancia más corta entre dos puntos de \mathbb{H} es la longitud del segmento de recta hiperbólica que los une.

3.3. Isometrías

En general para un espacio métrico (X, d) una isometría es un homeomorfismo f de X que preserva distancia. Es decir que, una isometría cumple que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y))$$

para cada par de puntos $x, y \in X$.

Como la función identidad de un espacio métrico es un homeomorfismo que preserva distancias, como la inversa de un homeomorfismo que preserva distancias es necesariamente un homeomorfismo que preserva distancias, y como la composición de dos homeomorfismos que preservan distancias es nuevamente un homeomorfismo que preserva distancias, el conjunto de todas las isometrías de un espacio métrico es un grupo.

Llamamos *isometría hiperbólica* a una isometría de $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$, y denotamos $\text{Isom}(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ al grupo de isometría del espacio métrico $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$. Denotamos $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ al subgrupo de $\text{Isom}(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ que preservan orientación, ya que \mathbb{H} es una superficie orientada en \mathbb{R}^3 .

4. Transformaciones de Möbius

4.1. Grupo de transformaciones de Möbius

Sobre el plano complejo extendido (la esfera de Riemann que es $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) se unifican las rectas de \mathbb{H} como círculos, las circunferencias que se intersectan con \mathbb{H} siguen siendo circunferencias sobre la esfera y las rectas euclidianas que se intersectan con \mathbb{H} al unir el punto $\{\infty\}$ se vuelven circunferencias sobre la esfera vía proyección estereográfica.

4.1.1 Definición. Una *transformación de Möbius* es una función $m: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ de la forma

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.

Denotamos por Möb^+ al conjunto de todas las transformaciones de Möbius.

Hacemos una pausa para recordar que se insertó ∞ a la aritmética empleada sobre el plano complejo extendido. Definimos imágenes por continuidad. Por ejemplo:

Para $a \in \bar{\mathbb{C}}$ distinto de cero, $\frac{a}{0} = \frac{a}{\lim_{w \rightarrow 0} w} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{a}{w} = \infty \in \bar{\mathbb{C}}$.

Sin embargo no se puede dar sentido a $\frac{0}{0}$ ni a $\frac{\infty}{\infty}$.

Sean m, n transformaciones de Möbius tales que $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $n(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$. Entonces

$$m(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}.$$

Lo cual está bien definido pues a y c no pueden ser cero al mismo tiempo de la misma manera que b y d . Además

$$\begin{aligned} m(\infty) &= \infty \Leftrightarrow c = 0; \\ m(0) &= \frac{b}{d} \text{ y } m(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \\ \text{o bien } m(0) &= \infty \Leftrightarrow d = 0. \end{aligned}$$

4.1.2 Teorema. Möb^+ es un grupo con el la operación composición.

Demostración. Sean $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $n(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, $t(z) = \frac{ez+f}{gz+h} \in \text{Möb}^+$

1. La composición

$$\begin{aligned} n \circ m(z) &= n\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \left(\frac{\alpha \left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + \beta}{\gamma \left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + \delta} \right) \\ &= \left(\frac{\alpha az + \alpha b + \beta cz + \beta b}{\gamma az + \gamma b + \delta cz + \delta d} \right) = \left(\frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta b)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)} \right) \in \text{Möb}^+ \end{aligned}$$

2. La composición de funciones es asociativa, por lo que

$$(m \circ n) \circ t = m \circ (n \circ t)$$

3. Si $a = 1, b = 0, c = 0$ y $d = 1$ entonces $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$; la función identidad está en Möb^+ , y es el elemento neutro.
 4. Existe inverso; ya que la inversa de $m(z)$, $m^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ es de nuevo una transformación Möbius.
- \therefore Se tiene que Mob^+ es un grupo con la operación composición.

■

4.1.3 Definición. El grupo general de transformaciones de Möbius Möb es el grupo generado por Möb^+ y la conjugación compleja C . Esto es, cada elemento p of Möb puede ser expresado como una composición

$$p = C \circ m_k \circ \dots \circ C \circ m_1$$

para algun $k \geq 1$, donde $m_k \in \text{Möb}^+$ y $C(z) = \bar{z}$ para todo z en \mathbb{C} y $C(\infty) = \infty$

Geoméricamente la acción C en $\bar{\mathbb{C}}$, es una reflexión y obsérvese que esta invierte orientación.

Es fácil ver que todo elemento de Möb son de la forma

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ o bien de la forma } m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

4.2. Matriz de representación

Observar que si en la composición de transformaciones de Möbius vemos a los coeficientes de n y m como entradas de matrices de 2×2 y las multiplicamos,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix},$$

resulta que las entradas de la multiplicación corresponde exactamente a los coeficientes de la composición $n \circ m$.

4.2.1 Definición. Sea $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Möb}^+$. Definimos el determinante $\det(m)$ de m por $ad - bc$.

Notar que este determinante de una transformación de Möbius no es una cantidad bien definida. Si multiplicamos los coeficientes de m por una constante $\alpha \neq 0$ no tiene efecto sobre la acción de m en $\bar{\mathbb{C}}$ por que

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\alpha az + \alpha b}{\alpha cz + \alpha d}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ y todo $z \in \bar{\mathbb{C}}$. Sin embargo los determinantes no son iguales pues si renombramos $n(z) = \frac{\alpha az + \alpha b}{\alpha cz + \alpha d}$ entonces el determinante de m es $\det(m) = ad - bc$ y el determinante de n es $\det(n) = \alpha^2(ad - bc)$, pero de aquí podemos hacer un proceso de *normalización* eligiendo α tal que el determinante de m sea igual a 1 y esto siempre se puede hacer. Todavía resta una ambigüedad, la cual es que podemos multiplicar por -1 a todos los coeficientes de m sin cambiar su determinante, pero con el resultado de 4.3.3 se observa que lo anterior no representa un problema.

4.3. Preservación de \mathbb{H}

Queremos ver las transformaciones que preservan el plano hiperbólico \mathbb{H} . Consideremos los subgrupos de Möb

$$\begin{aligned}\text{Möb}(\mathbb{H}) &= \{m \in \text{Möb} : m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\} \text{ y} \\ \text{Möb}^+(\mathbb{H}) &= \{m \in \text{Möb}^+ : m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\} \\ \text{Möb}(\bar{\mathbb{R}}) &= \{m \in \text{Möb} : m(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}}\}\end{aligned}$$

En el segundo subgrupo debemos buscar que condiciones deben cumplir los coeficientes de las transformaciones, para esto según la definición de \mathbb{H} $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es la frontera de \mathbb{H} respecto al otro semiplano, en el plano complejo extendido. Entonces basta encontrar todas las transformaciones de Möbius que fijan $\bar{\mathbb{R}}$ y que algún punto de \mathbb{H} lo mande a \mathbb{H} . Consideremos entonces el siguiente conjunto $H = \{m \in \text{Möb} : m(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}} \text{ y } m(i) \in \mathbb{H}\}$. Notar que $H = \text{Möb}(\mathbb{H})$

4.3.1 Proposición. *Cada elemento de $\text{Möb}(\bar{\mathbb{R}})$ tiene una de las siguientes formas*

1. $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$.
2. $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, donde a, b, c, d son imaginarios puros y $ad - bc = 1$.
3. $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$.
4. $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, donde a, b, c, d son imaginarios puros y $ad - bc = 1$.

Demostración. Dado que la función conjugación cumple $C(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}}$ basta verificar para la forma $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Möb}(\bar{\mathbb{R}})$, sabemos que $m^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$. Dado que m lleva $\bar{\mathbb{R}}$ en $\bar{\mathbb{R}}$ se tiene que

$$m(\infty) = \frac{a}{c}, m^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c} \text{ y } m^{-1}(0) = \frac{-b}{a} \text{ son puntos de } \bar{\mathbb{R}}.$$

Suponiendo de momento que $a \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces estos tres puntos están sobre \mathbb{R} . Poniendo a , b y d en términos de c

$$a = m(\infty)c, b = -m^{-1}(0)a = -m(\infty)m^{-1}(0)c \text{ y } d = -m^{-1}(\infty)c$$

Y normalizando el determinante que se puede imponer tal condición a c obtenemos que

$$\begin{aligned} 1 = ad - bc &= (m(\infty)c)(-m^{-1}(\infty)c) - (-m(\infty)m^{-1}(0)c)c \\ &= c^2[-m(\infty)m^{-1}(\infty) + m(\infty)m^{-1}(0)] \\ &= c^2[m(\infty)(-m^{-1}(\infty) + m^{-1}(0))] \end{aligned}$$

y como $m(\infty)$, $m^{-1}(\infty)$ y $m^{-1}(0)$ están en \mathbb{R} o bien c es real o bien c es complejo puro. Entonces o bien a , b , c y d son reales o bien son complejos puros.

En el caso que $a = 0$ la condición $ad - bc = 1$ implica que $c \neq 0$ y $b \neq 0$. Consideramos los puntos $m(1) = \frac{b}{c+d}$ y $m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$.

Al poner a d y b en términos de c , tenemos que

$$d = -m^{-1}(\infty)c \text{ y } b = m(1)(c + d) = (m(1) - m^{-1}(\infty))c.$$

Por lo tanto,

$$1 = ad - bc = (m^{-1}(\infty) - m(1))c^2$$

y de nuevo o bien c es real o bien c es complejo puro. Entonces o bien a , b , c y d son reales o bien son complejos puros.

En el caso que c sea cero, tenemos que $a \neq 0$ y $d \neq 0$, en este caso podemos escribir $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, y así $m(0) = \frac{b}{d}$ y $m(1) = \frac{a+b}{d}$. Poniendo a b y a en términos de d tenemos que

$$b = -m(0)d \text{ y } a = m(m(1) - m(0))d.$$

$$\therefore 1 = ad - bc = (m(1) - m(0))d^2$$

y una vez más a , b , c y d son reales o bien son complejos puros. ■

Del conjunto H anterior definido se tiene que todas las transformaciones de Möb($\bar{\mathbb{R}}$) que fijan un punto en \mathbb{H} son todas las transformaciones de Möb(\mathbb{H})

4.3.2 Proposición. *Cada elemento de Mob(\mathbb{H}) tiene una de las siguientes formas*

$$1. m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1.$$

$$2. m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \text{ donde } a, b, c, d \text{ son imaginarios puros y } ad - bc = 1.$$

Demostración. Sea $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in H$. Mostremos por contradicción que dichos coeficientes tienen que ser reales. Supongamos que a, b, c y d son complejos puros, ponemos $a = \alpha i$, $b = \beta i$, $c = \gamma i$ y $d = \delta i$, luego

$$\begin{aligned} 1 = ad - bc &= \alpha\delta i^2 - \beta\gamma i^2 = -\alpha\delta + \beta\gamma \\ &\Rightarrow \alpha\delta - \beta\gamma = -1. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(m(i)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{-\alpha + \beta i}{-\gamma + \delta i}\right) = \operatorname{Im}\left(\left(\frac{-\alpha + \beta i}{-\gamma + \delta i}\right)\left(\frac{-\gamma + -\delta i}{-\gamma + -\delta i}\right)\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)i + \alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\right) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{-1}{\gamma^2 + \delta^2} < 0. \end{aligned}$$

De modo que $m(i)$ no pertenece a \mathbb{H} lo que contradice que m sea elemento de H . Por tanto a, b, c y d son reales.

Supongamos ahora que $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \in H$. Mostremos por contradicción que dichos coeficientes tienen que ser complejos puros. Supongamos que a, b, c y d son reales, luego

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(m(i)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{-ai + b}{-ci + d}\right) = \operatorname{Im}\left(\left(\frac{-ai + b}{-ci + d}\right)\left(\frac{ci + d}{ci + d}\right)\right) \\ &= \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2} = \frac{-1}{c^2 + d^2} < 0. \end{aligned}$$

De modo que $m(i)$ no pertenece a \mathbb{H} lo que contradice que m sea elemento de H . Por tanto a, b, c y d son complejos puros. ■

Notemos que $\operatorname{Möb}^+(\mathbb{H}) = \{m(z) = \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1\}$. Cerramos la sección con el siguiente resultado según la notación usual para los grupos de matrices

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1 \right\} \\ PSL_2(\mathbb{R}) &= SL_2(\mathbb{R}) / \{\pm I\} \end{aligned}$$

4.3.3 Teorema. $PSL_2(\mathbb{R}) \cong \operatorname{Mob}^+(\mathbb{H})$

Demostración. Considérese la función $\varphi: SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ dada por

$$\varphi\left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left(m(z) = \frac{az + b}{cz + d}\right)$$

Sea $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ en $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$, luego $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ es tal que

$$\varphi\left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left(m(z) = \frac{az + b}{cz + d}\right)$$

Lo que muestra que φ es sobreyectiva.

Ahora sean $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, dado que

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)}\right)$$

y por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) \circ \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \\ &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right)\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \left(\frac{\alpha\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + \beta}{\gamma\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + \delta}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha az + \alpha b + \beta cz + \beta b}{\gamma az + \gamma b + \delta cz + \delta d}\right) = \left(\frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta b)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)}\right). \end{aligned}$$

Se tiene que φ es un homomorfismo de grupos. Es fácil ver que $\{\pm I\} \subseteq \text{Ker}(\varphi)$

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\varphi)$, entonces

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \frac{az + b}{cz + d} = z \Leftrightarrow b = c = 0 \text{ y } a = d = \pm 1.$$

Así que $\text{Ker}(\varphi) \subseteq \{\pm I\}$. Por tanto $\text{Ker}(\varphi) = \{\pm I\}$. Con lo anterior se cumplen las hipótesis del primer teorema de isomorfismo, por lo tanto $PSL_2(\mathbb{R})$ y $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ son isomorfos. ■

5. El interés de subgrupos de $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$

Los grupos *Fuchsianos* son, por definición, subgrupos discretos del grupo de isometría del plano hiperbólico, y se puede saber la relación con el grupo

de matrices $PSL_2(\mathbb{R})$ pero por ahora dicho tema de discusión se queda abierto en este trabajo.

Se mostrara que $Isom^+(\mathbb{H}) \cong PSL_2(\mathbb{R})$ como consecuencia inmediata de lo siguiente.

5.0.1 Lema. *Cada isometría hiperbólica de \mathbb{H} toma rectas hiperbólicas en rectas hiperbólicas.*

Demostración. Supongamos que y pertenece al segmento de recta l_{xz} que une a x y z . Entonces

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) = d_{\mathbb{H}}(x, z).$$

Sea f una isometría hiperbólica, entonces

$$d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) + d_{\mathbb{H}}(f(y), f(z)) = d_{\mathbb{H}}(f(x), f(z)).$$

En particular, $f(y)$ está en el segmento $l_{f(x)f(z)}$ que une a $f(x)$ con $f(z)$, y así

$$f(l_{xz}) = l_{f(x)f(z)}$$

Como una recta se puede expresar como una unión anidada de segmentos de recta, tenemos que las isometrías hiperbólicas toman rectas hiperbólicas en rectas hiperbólicas. ■

Para cada par de puntos $x, y \in \mathbb{H}$, denotamos $\Gamma(x, y)$ al conjunto de todos los caminos f de x a y .

5.0.2 Proposición. $Möb(\mathbb{H}) \subseteq Isom(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{H}$ y $m \in Möb(\mathbb{H})$. Veamos que $\{m \circ f : f \in \Gamma(x, y)\} \subset \Gamma(m(x), m(y))$, sea $f \in \Gamma(x, y)$. Como $m \circ f(0) = m(x)$ y $m \circ f(1) = m(y)$, tenemos que $m \circ f$ se encuentra en $\Gamma(m(x), m(y))$. Afirmamos que $length_{\mathbb{H}}(f)$ es invariante bajo la acción de $Möb(\mathbb{H})$. En efecto, sin pérdida de generalidad sea $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ elemento de $Möb^+(\mathbb{H})$, luego

$$\begin{aligned} length_{\mathbb{H}}(m \circ f) &= \int_0^1 \frac{1}{Im(m \circ f(t))} |(m \circ f)'(t)| dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{Im(f(t))}{|cf(t)+d|^2} \right)} \left| \frac{f'(t)}{(cf(t)+d)^2} \right| dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{Im(f(t))} |f'(t)| dt = length_{\mathbb{H}}(f). \end{aligned}$$

Entonces para cada camino $f \in \Gamma(x, y)$, tenemos que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(m(x), m(y)) &= \inf\{\text{length}_{\mathbb{H}}(g) : g \in \Gamma(m(x), m(y))\} \\ &\leq \inf\{\text{length}_{\mathbb{H}}(m \circ f) : f \in \Gamma(x, y)\} \\ &\leq \inf\{\text{length}_{\mathbb{H}}(f) : f \in \Gamma(x, y)\} = d_{\mathbb{H}}(x, y). \end{aligned}$$

Como m es invertible y m^{-1} es un elemento de $\text{Möb}(\mathbb{H})$, repetimos el argumento dado para ver que

$$\{m^{-1} \circ g : g \in \Gamma(m(x), m(y))\} \subset \Gamma(x, y),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(x, y) &= \inf\{\text{length}_{\mathbb{H}}(f) : f \in \Gamma(x, y)\} \\ &\leq \inf\{\text{length}_{\mathbb{H}}(m^{-1} \circ g) : g \in \Gamma(m(x), m(y))\} \\ &\leq \inf\{\text{length}_{\mathbb{H}}(g) : g \in \Gamma(m(x), m(y))\} = d_{\mathbb{H}}(m(x), m(y)). \\ &\therefore d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(m(x), m(y)). \end{aligned}$$

Por lo tanto m es una isometría hiperbólica. ■

Como consecuencia inmediata cada transformación de Möbius m que preserva \mathbb{H} , manda rectas hiperbólicas en rectas hiperbólicas. Y con todo lo mostrado podemos entender fácilmente y bien la demostración del siguiente teorema en [JA] página 104-108.

5.0.3 Teorema. $\text{Isom}(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}}) = \text{Möb}(\mathbb{H})$.

Referencias

- [HS] H.Short, *Notes on word hyperbolic groups*. Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990). World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991. Pág 3-63
- [NJ] http://www.cmat.edu.uy/cmat/eventos/erag23/documentos/notas/notas_juan.pdf
Pág. 1-7.
- [ME] <https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/43806/M%C3%A1rquez%20Escudero%201&isAllowed=y> Pág. 16-23.
- [JA] Anderson, James W., 1964. *Hyperbolic geometry*. - 2nd ed. - (Springer undergraduate mathematics series) Pág. 1-108.
- [IA] Snyder Kathy, *Isometries of the hiperbolic plane*.pdf