Introducción a los grupos de Lie

Emmanuel Abelardo Roque Jiménez
Asesorado por
Dr. Gregor Weingart

25 de junio-10 de agosto del 2018

Índice

1. Preliminares

1.1 Definición. *Un espacio localmente Euclidiano M de dimensión d es un espacio topológico Hausdorff M tal que cada punto $p \in M$ tiene una vecindad que es homeomorfa a un subconjunto abierto del espacio Euclidiano $\mathbb{R}^d$. Si φ es un homeomorfismo de un abierto conexo $U \subset M$ a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$, φ se llama un mapeo coordenado, y las funciones $x_i = r_i \circ \varphi$ (donde r_i es la i-ésima función coordenada estándar de $\mathbb{R}^d$) son llamadas funciones coordenadas. A la pareja (U, φ) se llama un sistema coordenado.*

1.2 Definición. *Una estructura diferenciable $\mathcal{F}$ de clase C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ en un espacio localmente Euclidiano M es una colección de sistemas coordenados $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ que satisfacen las siguientes propiedades:*

(a) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$

(b) $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ *es* C^k $\alpha, \beta \in A$

(c) La colección $\mathcal{F}$ es maximal con respecto a (b); esto es, si (U,φ) es un sistema coordenado tal que $\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}$ y $\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1}$ es $C^k\,\forall\alpha\in A$, entonces $(U,\varphi)\in\mathcal{F}$

Si tenemos una colección $\hat{\mathcal{F}}$ de sistemas coordenados que satisfacen las condiciones (a) y (b) de la definición anterior, podemos extenderla a un atlas maximal

1.3 Definición. *Una variedad diferenciable de clase C^k es una pareja ordenada $(M,\mathcal{F})$ que consiste de un espacio localmente Euclidiano M que satisface el segundo axioma de numerabilidad y de una estructura diferenciable $\mathcal{F}$ de clase C^k*

Durante el resto de este trabajo se considerarán variedades diferenciables de clase C^∞. Usualmente, una variedad diferenciable se denota simplemente por el conjunto M, entendiéndose que tiene una topología y una estructura diferencial que satisfacen la definición.
La condición de Hausdorff se pide para poder asegurar la unicidad de los límites y el segundo axioma de numerabilidad es esencial para poder mostrar la existencia de particiones suaves de la unidad, que es un resultado básico de la teoría.

1.4 Proposición. *Sea $(M,\mathcal{F})$ una variedad diferenciable. Si $U\subset M$ es abierto, entonces U es variedad diferenciable con estructura diferencial*

$$\mathcal{F}_U=\{(U_\alpha\cap U,\varphi_\alpha|_{U_\alpha\cap U}):(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathcal{F}\}$$

1.5 Proposición. *Si $(M_1,\mathcal{F}_1),(M_2,\mathcal{F}_2)$ son variedades suaves, de dimensión d_1,d_2 respectivamente entonces $M_1\times M_2$ es una variedad suave de dimensión d_1+d_2 con estructura diferenciable $\mathcal{F}$, la colección maximal que contiene*

$$\{(U_\alpha\times V_\beta),\phi_\alpha\times\psi_\beta:U_\alpha\times V_\beta\longrightarrow\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}|(U_\alpha,\phi_\alpha)\in\mathcal{F}_1,(\psi_\beta,V_\beta)\in\mathcal{F}_2\}$$

1.6 Definición. *Si M es una variedad suave, una función $f:M\to\mathbb{R}$ es suave si podemos cubrir a la variedad con sistema de coordenadas $(U,\varphi))$ tal que*

$$f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\mathbb{R}$$

es suave

Por la compatibilidad de los sistemas de coordenadas, se puede probar que entonces

$$f\circ\psi^{-1}:\psi(V)\to\mathbb{R}$$

es suave para cualquier carta (V,ψ). Al conjunto de todas las funciones suaves $f:M\to\mathbb{R}$ se denota por $C^\infty(M)$.

1.7 Definición. *Si p es un punto en una variedad M, y $\gamma:(-\epsilon,\epsilon)\to M$, decimos que γ es una curva suave que pasa por p si $\gamma(0)=p$ y existe alguna carta (U,φ) con $\gamma((-\epsilon,\epsilon))\subset U$ y $\varphi\circ\gamma$ es suave.*

Por la regla de la cadena y la compatibilidad de los sistemas coordenados para cualquier sistema coordenado (V,ψ) alrededor del punto p y tal que $\gamma((-\epsilon,\epsilon))\subset V$ entonces $\psi\circ\gamma$ es suave.

1.8 Definición. *Sean* $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ *y* $\hat{\gamma} : (-\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon}) \to M$ *curvas suaves que pasan por el punto* p*. Decimos que* $\gamma, \hat{\gamma}$ *son tangentes en* $t = 0$ *si en un sistema de coordenadas (y por ende en todos)* (U, φ) *con* $\gamma((-\epsilon, \epsilon)) \subset U$ *y* $\hat{\gamma}((-\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon})) \subset U$ *y*

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \hat{\gamma})'(0)$$

Si denotamos por $\mathcal{C}_p$ el conjunto de todas las curvas suaves en M que pasan por p, y definimos una relación $\sim$ en $\mathcal{C}_p$ por $\gamma \sim \hat{\gamma}$ si $\gamma, \hat{\gamma}$ son tangentes en p. Se puede probar que esta relación es de equivalencia.

1.9 Definición. *Definimos el espacio tangente a* M *en el punto* p *por*

$$T_pM := \mathcal{C}_p / \sim$$

La clase de un elemento $\gamma \in \mathcal{C}_p$ se denota por $\gamma'(0)$, o bien, por $\frac{d}{dt}|_{t=0}\gamma$. Se puede probar que hay una biyección entre T_pM y $\mathbb{R}^m$, donde $m = \dim M$, y se puede inducir una estructura de espacio vectorial en T_pM. Más aún, si (U, φ) es un sistema coordenado alrededor de un punto $p \in M$ con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_m$, y $f \in C^\infty(M)$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ definimos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Big|_p(f) = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial r_i}\Big|_{\varphi(p)}$$

y un resultado muy conocido dice lo siguiente

1.10 Proposición. $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p\}_{i=1}^m$ *es una base de* T_pM

1.11 Definición. *Una aplicación continua* $\psi : M \to N$*, con* M, N *variedades suaves, se dice que es* C^∞ *si y sólo si* $\tau \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ *es* C^∞ *para cualesquiera mapeos coordenados* φ *en* M *y* τ *es* N

1.12 Definición. *Sea* $\psi : M \to N$ *una aplicación* C^∞ *y sea* $p \in M$*. La diferencial de* ψ *en* p *es el mapeo lineal* $(\psi)_{*,p} : T_pM \to T_{\psi(p)}N$ *definido por la ecuación*

$$(\psi)_{*,p}(v)(g) := v(g \circ \psi) \quad v \in T_pM,\ g \in C^\infty(N)$$

1.13 Definición. *Sea* M *una variedad suave de dimensión* m*. Un subconjunto* $Z \subset M$ *es llamado una subvariedad de dimensión* k *si para todo* $z \in Z$ *existe una carta* (U, φ) *de* M *que contiene a* z *y tal que* $\varphi(U \cap Z) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k$*, donde* $\mathbb{R}^k$ *está identificado con el subespacio* $\{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m | x_j = 0 \forall j \geq k+1\}$

Denotaremos TM el conjunto dado por la unión disjunta de los espacios tangentes T_pM, $p \in M$. Definimos la proyección $\pi : TM \to M$ con la condición de que $\pi(T_pM) \subset \{p\}$

1.14 Definición. *Un campo vectorial* X *en* M *es una aplicación suave* $X : M \to TM$*,* $X_p \in T_pM$ *y además* $\pi \circ X = id$

Al conjunto de todos los campos vectoriales en M se le denota por $\Gamma(TM)$. Definiendo la suma y la multiplicación por escalar puntualmente, dotamos a este conjunto de una estructura de espacio vectorial.

2. Definición y ejemplos

2.1 Definición. *Un grupo de Lie* $(G, \cdot)$ *es un grupo, que además es una variedad suave, y se cumple lo siguiente:*

- *La operación del grupo* $\cdot : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$ *es una aplicación suave*
- *La aplicación* $\iota : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ *es suave*

2.2 Ejemplo. $(\mathbb{R}^n, +)$ *es un grupo de Lie, con la estructura diferencial estándar de* $\mathbb{R}^n$ *y la suma como operación. Es claro que la operación del grupo, y la aplicación* ι, $x \mapsto -x$, *son suaves.*

2.3 Ejemplo $(GL(n, \mathbb{R}))$**.** *En este ejemplo vamos a ver que* $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\}$ *es un grupo de Lie, con el producto de matrices como operación. Consideremos* $(Mat_{n\times n}(\mathbb{R}), \cdot)$, *las matrices reales de* $n \times n$ *con el producto de matrices. Como* $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$, *tiene una estructura de variedad diferencial, de hecho* $Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. *Por otra parte,* $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, *es una aplicación suave (en particular continua) ya que es un polinomio en las entradas. De aquí vemos que* $GL(n, \mathbb{R}) = det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$, *por lo que se sigue que* $GL(n, \mathbb{R})$ *es un abierto de* $\mathbb{R}^{n^2}$, *y por la proposición 1.4 concluimos que es una variedad suave.*
Sabemos que $GL(n, \mathbb{R})$ *es un grupo con el producto de matrices como operación. Además, la multiplicación de dos matrices* $A = (a_{i,j})$, $B = (b_i j)$ *es una aplicación suave ya que en términos de las coordenadas*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Por último,

$$\iota(A) = A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{co}$$

donde A^{co} *es la matriz de cofactores de* A. *De aquí, podemos concluir que* ι *es una aplicación racional en las entradas de* A *cuyo denominador no se anula, por lo que es una aplicación suave. Por lo tanto,* $GL(n, \mathbb{R})$ *es un grupo de Lie.*

Nota: Si $(G_1, \star_1), (G_2, \star_2)$ son grupos (en el sentido abstracto), el producto directo $G_1 \times G_2$ es a su vez un grupo con la operación

$$* : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_1 \times G_2$$

$$((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \mapsto (g_1, g_2) * (h_1, h_2) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2)$$

La identidad en $G_1 \times G_2$ está dada por $e_{G_1 \times G_2} = (e_{G_1}, e_{G_2})$, y los inversos están dados por $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$.

2.4 Proposición. *Sean G_1, G_2 grupos de Lie, entonces $G_1 \times G_2$ (el producto directo de los grupos G_1 y G_2) es un grupo de Lie, con la estructura diferencial dada por 1.5 y la estructura de grupo como en la nota anterior.*

2.5 Lema. *Sea $H \subset G$ un subgrupo abstracto de un grupo de Lie G que es a su vez una subvariedad. Entonces H es un grupo de Lie*

A continuación enunciaremos un teorema importante de la teoría, sin demostración, ya que su prueba es muy técnica y está lejos del alcance de esta introducción.

2.6 Teorema. *Sea G un grupo de Lie y sea H un subgrupo de G. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) H es cerrado (en el sentido de topología)

(b) H es una subvariedad

2.7 Corolario. *Los subgrupos cerrados de G son grupos de Lie*

De aquí se sigue que los grupos matriciales $O(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R})$,etc son grupos de Lie.

3. Campos invariantes a la izquierda

En esta sección, trabajaremos un concepto muy importante en la teoría de los grupos de Lie que son los campos invariantes a la izquierda.

3.1 Definición. *Sea G un grupo de Lie y sea $g \in G$. La aplicación $L_g : G \to G$, $h \mapsto gh$ se llama la traslación izquierda por el elemento g. La aplicación $R_g : G \to G$, $h \mapsto hg$ se llama la traslación derecha por el elemento g.*

Observación Como la operación del grupo es suave, claramente L_g es una aplicación suave de $G \in G$. Además, es una biyección, y del hecho que $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$, tenemos que la inversa de L_g también es una aplicación suave, por lo tanto, L_g es un difeomorfismo. Análogamente $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$, y R_g también es un difeomorfismo.

3.2 Definición. *Un campo vectorial X en G se dice invariante a la izquierda si $\forall g, h \in G$:*

$$(L_g)_{*,h} X_h = X_{gh}$$

X se dice invariante a a la derecha si $\forall g, h \in G$:

$$(R_g)_{*,h} X_h = X_{hg}$$

A partir de ahora trabajaremos con campos invariantes a la izquierda.

3.3 Proposición. *Un campo vectorial X en G es invariante a la izquierda si y sólo si $X(f \circ L_g) = (Xf) \circ L_g \, \forall g \in G, f \in C^\infty(G)$*

Demostración. Sean $g, h \in G$ y $f \in C^\infty(G)$. Como X es invariante a la izquierda

$$X(f \circ L_g)(h) = X_h(f \circ L_g) = (L_g)_{*,h} X_h(f) = X_{gh}(f) = (Xf)(gh) = (Xf) \circ L_g(h)$$

Como h es un elemento arbitrario, de la igualdad anterior se concluye la equivalencia. $\square$

Queremos ver ahora las condiciones en coordenadas locales para que un campo sea invariante a la izquierda. Supongamos que G es un grupo de Lie con $\dim G = m$. Sean $\gamma, h \in G$, con coordenadas respectivas $(x^1, \ldots, x^m)$, $(z^1, \ldots, z^m)$ en un sistema coordenado (U, φ). Supongamos que en coordenadas locales, la operación del grupo en el elemento $g = \gamma h$ está determinada por las coordenadas

$$(p^1(x^1, \ldots, x^m, z^1, \ldots z^m), \ldots, p^m(x^1, \ldots, x^m, z^1, \ldots, z^m))$$

con $p^1, \ldots, p^m \in C^\infty(\varphi(U) \times \varphi(U))$. Luego

$$\begin{aligned} &(L_\gamma)_{*,h} : T_h G \to T_{\gamma h} G \\ &\qquad \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big|_h \mapsto \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial p^\mu}{\partial z^\alpha}(x^1, \ldots, x^m, z^1, \ldots, z^m) \frac{\partial}{\partial p^\mu}\Big|_{\gamma h} \end{aligned}$$

De forma que si $X_h = \sum_{\alpha=1}^m \xi^\alpha(z^1, \ldots, z^m) \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\big|_h$, con $\xi^1, \ldots, \xi^m \in C^\infty(\varphi(U))$. Entonces, si X es invariante a la izquierda

$$\begin{aligned} (L_\gamma)_{*,h} X_h &= \sum_{\mu,\alpha=1}^m \xi^\alpha(z^1, \ldots, z^m) \frac{\partial p^\mu}{\partial z^\alpha}(x^1, \ldots, x^m, z^1, \ldots, z^m) \frac{\partial}{\partial p^\mu}\Big|_{\gamma h} \\ &= \sum_{\mu=1}^m \xi^\mu(p^1(x,z), \ldots, p^m(x,z)) \frac{\partial}{\partial p^\mu}\Big|_{\gamma h} \\ &= X_{\gamma h} \end{aligned}$$

Hemos probado lo siguiente

3.4 Lema. *En coordenadas locales, X es invariante a la izquierda si y sólo si $\forall \mu = 1, \ldots m$ y $\forall x, z$ se cumple que*

$$\sum_{\alpha=1}^m \xi^\alpha(z) \frac{\partial p^\mu}{\partial z^\alpha}(x,z) = \xi^\mu(p^1(x,z), \ldots, p^m(x,z)) \tag{3.1}$$

Si pensamos ahora que el sistema coordenado (U, φ) está centrado en el elemento neutro del grupo, i.e $\varphi(e) = 0$, y consideramos $z = 0$ en 3.1, primero notemos que $p(x, 0) = x$, ya que correspondería a las coordenadas del punto $g = \gamma e = \gamma$, por lo que concluimos que

$$\sum_{\alpha=1}^m \xi^\alpha(0) \frac{\partial p^\mu}{\partial z^\alpha}(x, 0) = \xi^\mu(p(x,0)) = \xi^\mu(x) \quad \forall \mu = 1, \ldots m, \forall x \tag{3.2}$$

3.5 Definición. *Un campo vectorial en un grupo de Lie se llama constante a la izquierda si y sólo si*

$$\forall \gamma \in G \quad X_\gamma = (L_\gamma)_{*,e} X_e \in T_\gamma G$$

Por la discusión anterior, en coordenadas locales un campo vectorial X es constante a la izquierda si satisface 3.1 en $z = 0 \cong e$, es decir, satisfacen la ecuación 3.2 Si ahora definimos

$$X_\alpha^{izq} := \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial p^\mu}{\partial z^\alpha}(x, 0) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{3.3}$$

vemos que un campo X constante a la izquierda se puede expresar como

$$\begin{aligned} X = \sum_{\mu=1}^{m} \xi^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \\ \overset{3,2}{=} \sum_{\alpha,\mu=1}^{m} \xi^\alpha(0) \frac{\partial p^\mu}{\partial z^\alpha}(x, 0) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ = \sum_{\alpha=1}^{m} \xi^\alpha(0) X_\alpha^{izq} \end{aligned}$$

Esto nos dice que un campo constante a la izquierda, se expresa como combinación lineal (con coeficientes constantes) de los campos X_α^{izq}. Ahora veamos que estos campos también son invariantes a la izquierda.

3.6 Lema. *Un campo vectorial X en un grupo de Lie G es constante a la izquierda si y sólo si es invariante a la izquierda.*

Demostración. Evidentemente, si X es invariante a la izquierda, también satisface ser constante a la izquierda. Ahora veamos que si es constante a la izquierda entonces es invariante a la izquierda. Por la asociatividad del grupo $L_\gamma \circ L_g = L_{\gamma g} \, \forall \gamma, g \in G$. Por la regla de la cadena $(L_\gamma)_{*,g} \circ (L_g)_{*,e} = (L_{\gamma g})_{*,e}$. Como X satisface 3.2, tenemos que $X_g = (L_g)_{*,e} X_e \forall g \in G$, por lo que $\forall \gamma, g$

$$\begin{aligned} (L_\gamma)_{*,g} X_g &= \\ &= (L_\gamma)_{*,g}((L_g)_{*,e} X_e) \\ &= ((L_\gamma)_{*,g} \circ (L_g)_{*,e}) X_e \\ &= (L_{\gamma g})_{*,e} X_e = X_{\gamma g} \end{aligned}$$

□

Nota: De forma similar, podríamos pensar en la expresión en coordenadas locales de los campos invariantes a la derecha. Siguiendo las ideas anteriores, se puede concluir que si definimos

$$X_\alpha^{der} := \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial p^\mu}{\partial z^\alpha}(0, x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{3.4}$$

entonces un campo invariante a la derecha se expresa como

$$X = \sum_{\alpha=1}^{m} \xi^{\alpha}(0) X_{\alpha}^{der}$$

4. Álgebras de Lie

4.1 Definición. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ de característica 0. Se dice que V admite una estructura de álgebra de Lie si existe un operador bilineal $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$, $(x,y) \mapsto [x,y]$ llamado corchete (de Lie) que cumple:*

$$[x,y] = -[y,x] \qquad \forall x,y \in V \tag{4.1}$$

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \qquad \forall x,y,z \in V \tag{4.2}$$

4.2 Definición. *Un álgebra de Lie es un espacio vectorial V sobre $\mathbb{F}$ con una estructura de álgebra de Lie.*

Podemos pensar que un álgebra de Lie es un par ordenado $(V,[\cdot,\cdot])$ donde $[\cdot,\cdot]$ es un operador bilineal en V que satisface 4.1, llamada condición de antisimetría, y satisface 4.2, llamada identidad de Jacobi.

4.3 Definición. *Sea $(V,[\cdot,\cdot])$ un álgebra de Lie. A $(V,[\cdot,\cdot]^{op})$ con $[x,y]^{op} := -[x,y]$, le llamamos el álgebra de Lie opuesta a $(V,[\cdot,\cdot])$.*

Es fácil verificar directamente de la definición que que $[\cdot,\cdot]^{op}$ es un operador bilineal en V que satisface 4.1 y 4.2, por lo que $[\cdot,\cdot]^{op}$ es una estructura de álgebra de Lie en V, y por tanto, $(V,[\cdot,\cdot]^{op})$ es un álgebra de Lie.

4.4 Definición. *Sea $(V,[\cdot,\cdot])$ un álgebra de Lie, y sea $W \subset V$ un subespacio vectorial de V. Se dice que*

- *W es una subálgebra de Lie de V si $\forall w_1, w_2 \in W$, $[w_1,w_2] \in W$*
- *W es un ideal de V si $\forall v \in V, \forall w \in W$, $[v,w] \in W$.*

Observemos que todo ideal de un álgebra de Lie V es a su vez una subálgebra de V, y que toda álgebra de Lie V admite al menos dos ideales, llamados ideales triviales, que son $\{0\}$ y V.

4.5 Definición. *Sean $(V_1,[\cdot,\cdot]_1),(V_2,[\cdot,\cdot]_2)$ álgebras de Lie. Decimos que $\rho : V_1 \to V_2$ es un homeomorfismo de álgebras de Lie si*

1. *ρ es lineal*
2. *$\rho([x,y]_1) = [\rho(x),\rho(y)]_2 \quad \forall x,y \in V_1$*

si ρ es inyectiva (respectivamente suprayectiva) se le llama monomorfismo (respectivamente epimorfismo), y si ρ es biyectiva se le llama isomorfismo.

4.1. El álgebra de Lie de los campos vectoriales

Supongamos que M es una variedad suave de dimensión m, consideremos X, Y, con expresión en coordenadas locales $X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_{j=1}^{m} Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ campos vectoriales suaves en M. Definimos el corchete de Lie de dos campos vectoriales por

$$[X,Y]f := X(Yf) - Y(Xf) \quad f \in C^\infty(M)$$

Primeramente, probaremos que dicho corchete dota de una estructura de álgebra de Lie a $\Gamma(T(M))$

4.6 Proposición. $\Gamma(T(M))$ *es cerrado bajo el corchete de campos vectoriales, más aún*

$$[X,Y] = \sum_{j=1}^{m} (X(Y^j) - Y(X^j)) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Demostración. Sea $f \in C^\infty(M)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
[X,Y]f &= X(Yf) - Y(Xf) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\left(\sum_{j=1}^{m} Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - \left(\sum_{j=1}^{m} Y^J \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} X^i \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) - \sum_{j=1}^{m} Y^j \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} + X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{m} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)(f) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right)(f) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} \left(X(Y^j) - Y(X^j)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right)(f) \quad \forall f \in C^\infty(M)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[X,Y] = \sum_{j=1}^{m} (X(Y^j) - Y(X^j)) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

y $\Gamma(T(M))$ es cerrado bajo el corchete de campos vectoriales □

Directamente de la definición del corchete de Lie vemos que es bilineal, antisimétrico y que satisface la identidad de Jacobi. Como $\Gamma(T(M))$ es un espacio vectorial, podemos concluir que es un álgebra de Lie.

4.2. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

Sea G un grupo de Lie, y denotemos $L(G)$ al conjunto de todos los campos vectoriales invariantes a la izquierda.

4.7 Lema. $(L(G), [\cdot,\cdot])$ *es una subálgebra de Lie de* $(\Gamma(T(G)))$

Demostración. Basta ver que $[\cdot,\cdot]|_{L(G)} : L(G) \times L(G) \to L(G)$. Sean $X, Y \in L(G)$, usando la proposición 3.3 tenemos que

$$\begin{aligned}
[X,Y](f \circ L_g) &= X(Y(f \circ L_g)) - Y(X(f \circ L_g)) \\
&= X((Yf) \circ L_g) - Y((Xf) \circ L_g) \\
&= (X(Yf)) \circ L_g - (Y(Xf)) \circ L_g \\
&= (X(Yf) - Y(Xf)) \circ L_g \\
&= ([X,Y](f)) \circ L_g \quad \forall f \in C^\infty(G)
\end{aligned}$$

y de aquí se sigue que $[X,Y] \in L(G)$ □

4.8 Teorema. $L(G) \cong T_eG$ *como espacios vectoriales*

Demostración. Consideremos la aplicación $j : T_eG \to L(G), A \mapsto j(A)$, $j(A)_g := (L_g)_{*,e}A \, \forall g \in G$. Primeramente, la aplicación j está bien definida ya que

$$\begin{aligned}
(L_h)_{*,g}(j(A)_g) &= (L_h)_{*,g}((L_g)_{*,e}(A)) \\
&= ((L_h)_{*,g} \circ (L_g)_{*,e})(A) \\
&= (L_h g)_{*,e}(A) \\
&= j(A)_{hg}
\end{aligned}$$

Por lo que $j(A)$ es invariante por la izquierda. Además, j claramente es lineal. Por otra parte j es inyectiva, ya que $j(A) = j(B)$ implica que en particular $j(A)_e = j(B)_e$ y esto implica que $A = B$. Por último, j es sobre, ya que dado $X \in L(G)$, $j(X_e)_g = (L_g)_{*,e}(X_e) = X_{ge} = X_g \, \forall g \in G$, y de aquí concluimos que $j(X_e) = X$. Así, j es un isomorfismo lineal. □

De lo anterior, tenemos que $L(G)$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, y más aún $\dim L(G) = \dim T_eG = \dim G$. Además, podemos inducir una estructura de álgebra de Lie en T_eG a partir de la de $L(G)$ definiendo

$$[X_e, Y_e] := [X,Y]_e \quad X, Y \in L(G) \tag{4.3}$$

4.9 Definición. *A T_eG con el corchete definido como en 4.3 se le llama el álgebra de Lie del grupo G, y usualmente se denota por* $\mathfrak{g}$

4.10 Nota. *Siguiendo un proceso análogo con los campos vectoriales invariantes a la derecha $R(G)$, se llega a que también se cumple que $R(G) \cong T_eG$ como espacios vectoriales, y puede inducir también una estructura de álgebra de Lie en T_eG con $[X_e, Y_e] := [X,Y]_e \quad X, Y \in R(G)$. A ésta álgebra de Lie del grupo G se le conoce como el álgebra de Lie opuesta de G.*

4.2.1. El corchete de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$

Haremos una justificación de por qué el corchete de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = T_I(GL(n,\mathbb{R}))$ suele aparecer definido como el conmutador de matrices, es decir, dadas $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, $[A,B] := AB - BA$. Empezaremos mostrando la justificación para el caso $n = 2$, y posteriormente generalizaremos el argumento para $n \in \mathbb{N}$ Como sabemos $GL(n,\mathbb{R}) \subset Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene estructura de variedad suave por ser un subconjunto abierto de $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, por lo que podemos asignarle coordenadas globales. Consideremos

$$X := \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\ A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad a,b,c,d,x,y,z,w \in C^\infty(GL(2,\mathbb{R}))$$

Queremos calcular los campos X_α^{izq}, descritos por 3.3. Recordemos que en esa ecuación habíamos identificado el elemento identidad con el vector de coordenadas cero, aquí lo identificaremos con sus coordenadas usuales, dadas como en la matriz identidad. Definamos

$$M := \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa+yc & xb+yd \\ za+wc & zb+wd \end{pmatrix}$$

Luego, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{izq} &= \frac{\partial}{\partial a}\Big|_{A=I} M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} = x\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{izq} &= \frac{\partial}{\partial b}\Big|_{A=I} M = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{pmatrix} = x\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial w} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{izq} &= \frac{\partial}{\partial c}\Big|_{A=I} M = \begin{pmatrix} y & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} = y\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{izq} &= \frac{\partial}{\partial d}\Big|_{A=I} M = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & w \end{pmatrix} = y\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial w}
\end{aligned}$$

Si ahora consideramos el corchete de campos vectoriales, podemos observar que ocurre lo siguiente

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{izq}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{izq}\right] = -y\frac{\partial}{\partial x} - w\frac{\partial}{\partial z} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{izq}$$

y pensando en matrices, con el corchete definido como el conmutador, tenemos que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculos similares muestran que esta relación entre el corchete de los campos invariantes por la izquierda y el corchete de las matrices correspondientes se mantiene.

Caso general Consideremos $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $a_{ij}, b_{ij} \in C^\infty(GL(n, \mathbb{R}))$ $\forall i, j = 1, \ldots, n$. Las coordenadas de AB están dadas por $(AB)_{rs} = \sum_{k=1}^n a_{rk} b_{ks}$. Luego, definimos

$$(E_{ij})^{izq} := \frac{\partial}{\partial b_{ij}}\Big|_{B=I}(AB)$$

Notemos, que las entradas donde aparecec b_{ij} corresponden a índices de la forma $(r, j), 1 \leq r \leq n$, y

$$\frac{\partial}{\partial b_{ij}}\Big|_{B=I}(AB)_{rj} = a_{ri} \quad 1 \leq r \leq n$$

Por linealidad, concluimos que

$$(E_{ij})^{izq} = \sum_{r=1}^n a_{ri} \frac{\partial}{\partial a_{rj}}$$

podemos pensar que las funciones a_{ri} se corresponden con la i-ésima columna de A, mientras que los índices de $\frac{\partial}{\partial a_{rj}}$ se corresponden con la j-ésima columna de A. Luego,

$$\begin{aligned}
\left[(E_{ij})^{izq}, (E_{kl})^{izq}\right] &= \left[\sum_{r=1}^n a_{ri} \frac{\partial}{\partial a_{rj}}, \sum_{s=1}^n a_{sk} \frac{\partial}{\partial a_{sl}}\right] \\
&= \sum_{r,s=1}^n a_{ri} \left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial a_{rj}}\right) \frac{\partial}{\partial a_{sl}} - \sum_{r,s=1}^n a_{sk} \left(\frac{\partial a_{ri}}{\partial a_{sl}}\right) \frac{\partial}{\partial a_{rj}} \\
&= \sum_{r,s=1}^n a_{ri} \delta_r^s \delta_j^k \frac{\partial}{\partial sl} - \sum_{r,s=1}^n a_{sk} \delta_r^s \delta_l^i \frac{\partial}{\partial rj} \\
&= \delta_j^k \sum_{r=1} a_{ri} \frac{\partial}{\partial rl} - \delta_l^i \sum_{r=1} a_{rk} \frac{\partial}{\partial rj} \\
&= \delta_j^k (E_{il})^{izq} - \delta_l^i (E_{kj})^{izq}
\end{aligned}$$

Las matrices E_{ij} están definidas por la ecuación $(E_{ij})_{rs} = \delta_i^r \delta_j^s$, es decir, tienen un 1 en la entrada (i, j) y cero en el resto de las entradas. De aquí vemos que

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_j^k E_{il}$$

Por lo que

$$[E_{ij}, E_{kl}] = E_{ij} E_{kl} - E_{kl} E_{ij} = \delta_j^k E_{il} - \delta_l^i E_{kj}$$

Hemos probado

4.11 Teorema. $\left[(E_{ij})^{izq}, (E_{kl})^{izq}\right] = [E_{ij}, E_{kl}]^{izq}$

Para campos invariantes a la derecha, si

$$(E_{ij})^{der} = \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\Big|_{A=I} AB$$

se puede concluir que

$$(E_{ij})^{der} = \sum_{s=1}^{n} b_{js} \frac{\partial}{\partial b_{is}}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left[(E_{ij})^{der}, (E_{kl})^{der}\right] &= \left[\sum_{s=1}^{n} b_{js} \frac{\partial}{\partial b_{is}}, \sum_{r=1}^{n} b_{lr} \frac{\partial}{\partial b_{kr}}\right] \\
&= \sum_{r,s=1}^{n} b_{js} \left(\frac{\partial b_{lr}}{\partial b_{is}}\right) \frac{\partial}{\partial b_{kr}} - \sum_{r,s=1}^{n} b_{lr} \left(\frac{\partial b_{js}}{\partial b_{kr}}\right) \frac{\partial}{\partial b_{is}} \\
&= \sum_{r,s=1}^{n} b_{js} \delta_r^s \delta_i^l \frac{\partial}{\partial kr} - \sum_{r,s=1}^{n} b_{lr} \delta_r^s \delta_k^j \frac{\partial}{\partial is} \\
&= \delta_i^l (E_{kj})^{der} - \delta_j^k (E_{il})^{der} \\
&= -[E_{ij}, E_{kl}]^{der}
\end{aligned}$$

Por lo que se cumple lo siguiente

4.12 Teorema. $\left[(E_{ij})^{der}, (E_{kl})^{der}\right] = -[E_{ij}, E_{kl}]^{der}$

En este caso particular es muy sencillo probar lo siguiente

4.13 Proposición. *El álgebra de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ es isomorfa a su álgebra de Lie opuesta*

Demostración. $\rho : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})^{op}$, con $\rho(A) = -A$, $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ es un isomorfismo de álgebras de Lie □

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Gregor Weingart por todo su apoyo, disposición y todas sus enseñanzas durante la realización de este proyecto. Se agradece el apoyo económico para el desarrollo del presente proyecto al Proyecto FORDECYT 265667 "Programa para un avance global e integrado de la Matemática Mexicana".

Referencias

[1] Warner, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Graduate Texts in Mathematics No. 94. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1983)

[2] van den Ban, E.P. *Lie groups.* Lecture notes, Spring 2010 (Universiteit Utrecht) http://www.staff.science.uu.nl/ ban00101/lecnotes/lie2010.pdf

[3] Murray, M. *Differential geometry.* Lecture notes (Honours) 1996 (University of Adelaide) http://www.maths.adelaide.edu.au/michael.murray/dg_hons/dg_hons.html

Emmanuel Abelardo Roque Jiménez