Los Conjuntos Internamente Cadena Transitivos

Autor: Sergio Misael Vargas Montoya
Asesor: Dr. Ángel Cano Cordero

Instituto de Matemáticas
Unidad Cuernavaca

Agradecimientos:
Se agradece apoyo económico para el desarrollo del presente proyecto al:
Proyecto FORDECYT 265667 "Programa para un avance global e integrado de la Matemática Mexicana"

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo principal de la teoría de los sistemas dinámicos es entender el comportamiento eventual de un proceso iterativo. Con *iterar* nos referimos a repetir un proceso sucesivamente. En dinámica, el proceso que se repite es el de aplicar una función. En esta primera parte, recordaremos algunos de los conceptos básicos de la teoría de los sistemas dinámicos y presentaremos algunos ejemplos.

A partir de aquí, consideraremos a (X, d) como un espacio métrico y a $f\colon X \to X$ como una función continua.

1.1. Definiciones elementales

En este trabajo, es de gran interes el comportamiento de un punto bajo el proceso iterativo de una función, es decir, dado un $x_0 \in X$, queremos saber lo que sucede con los puntos $x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^n(x_0)$ cuando n es suficientemente grande. La forma en que determinaremos el comportamiento de estos puntos es observando sus órbitas.

Definición 1.1. Sea $x \in X$, decimos que $\gamma^+(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^n(x)$ es la **órbita positiva** de x.

La órbita positiva de x es entonces el conjunto $\{x, f(x), f^2(x), .., f^n(x), ...\}$.

Ejemplo 1.2. Sea $x = 3$, y consideremos la función $f(x) = x^2 + 1$. Entonces los primeros puntos de la órbita de x son:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 3 \\ f(x) & = & f(3) = 10 \\ f^2(x) & = & f(10) = 101 \\ f^3(x) & = & f(101) = 10202 \\ \vdots & & \end{array}$$

Ejemplo 1.3. Podemos considerar el círculo como el grupo cociente

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \,|\, x \in \mathbb{R}\}$$

De manera equivalente, podemos ver el círculo como

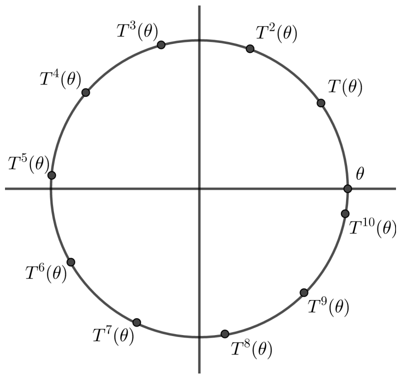
$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} = \{\exp 2\pi i\theta \,|\, \theta \in [0,1)\}$$

Pondremos nuestra atención en las rotaciones en el círculo. Sea $\alpha \in [0,1)$ fijo. Definimos

$$T\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$
$$x \mapsto x + \alpha (mod\ 1)$$

Esto es equivalente a $\exp 2\pi i\theta \mapsto \exp 2\pi i(\theta + \alpha)$. Esta función actúa en el círculo, rotándolo por un ángulo α.

Figura 1.1: Rotación por un ángulo α.



En la Figura 1.1 se muestran algunos puntos de la órbita positiva de θ al aplicarle una rotación por un ángulo α.

Ejemplo 1.4. Consideremos ahora el plano complejo, y la función $f(z) = z^2$. Sea $z = re^{i\theta}$, donde $|z| = r$, entonces la órbita de z es $re^{i\theta}, r^2e^{2i\theta}, r^4e^{4i\theta}, r^8e^{8i\theta}, ...$

Figura 1.2: $|z| < 1$

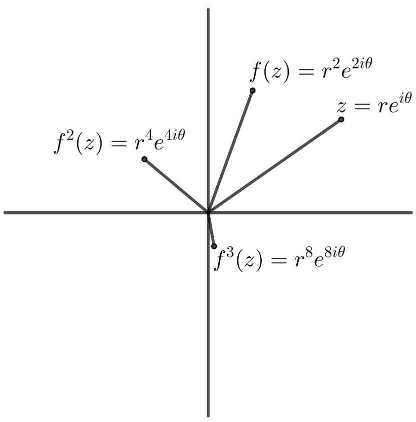
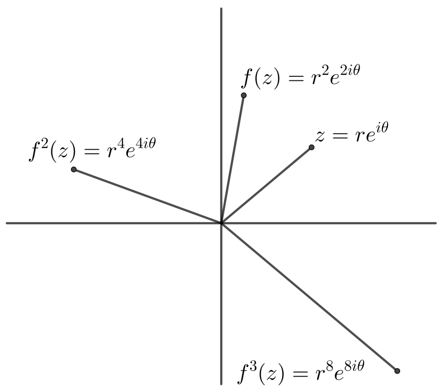


Figura 1.3: $|z| > 1$



Ejemplo 1.5. Sea T, la función del panadero, definida de la siguiente manera

$$T(x,y) = \begin{cases} \left(2x, \frac{y}{2}\right) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ \left(2x - 1, \frac{1+y}{2}\right) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Veamos el comportamiento del cuadrado unitario bajo T.

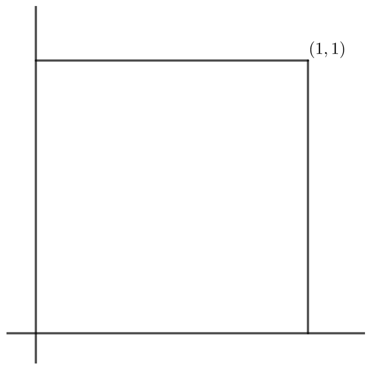


Figura 1.4: $[0,1]^2$

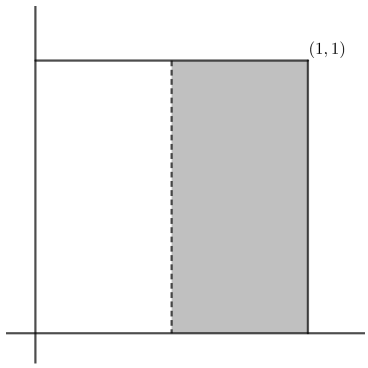


Figura 1.5

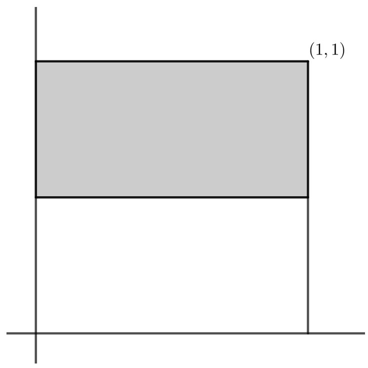


Figura 1.6: $T([0,1]^2)$

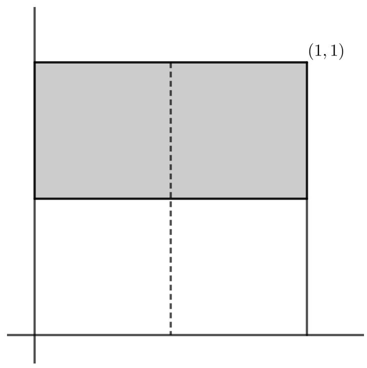


Figura 1.7

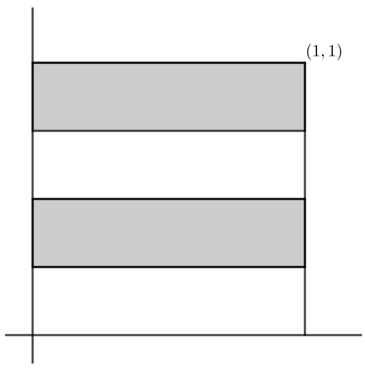


Figura 1.8: $T^2([0,1]^2)$

Ejemplo 1.6. Consideremos el espacio

$$\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \cdots) \mid s_j = 0 \text{ o } 1\},$$

al cual llamaremos el espacio de sucesiones en los dos símbolos 0 y 1. A los elementos en Σ_2, en ocasiones los llamaremos *palabras*. Σ_2 es un espacio métrico definiendo la distancia entre dos puntos $s = (s_0 s_1 s_2 \cdots)$ y $t = (t_0 t_1 t_2 \cdots)$ de la siguiente manera:

$$d[s,t] = \sum_{k \geq 0} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}$$

El siguiente resultado sobre la métrica en Σ_2 lo demuestra Devaney. Lo presentamos aquí sin prueba.

Proposición 1.1. *Sean $s, t \in \Sigma_2$, y supongamos que $s_k = t_k$ para $k = 0, 1, ..., n$. Entonces $d[s,t] \leq 1/2^n$. De manera recíproca, si $d[s,t] \leq 1/2^n$, entonces $s_k = t_k$ para $k \leq n$.*

Este resultado nos da una manera sencilla de saber si dos puntos en Σ_2 son cercanos, esto es, dos sucesiones son cercanas entre sí, si sus primeras entradas corresponden.

Definición 1.7. La función shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ está dada por

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \cdots) = (s_1 s_2 s_3 \cdots).$$

La función shift "borra" la primera entrada en una sucesión, y recorre todas las demás un lugar a la izquierda. En la métrica definida, σ es una función continua.

Entonces los primeros puntos de órbita positiva de $s = (s_0 s_1 s_2 \cdots)$ en Σ_2 bajo σ son

$$\begin{array}{rcl} s & = & (s_0 s_1 s_2 \cdots) \\ \sigma(s) & = & (s_1 s_2 s_3 \cdots) \\ \sigma^2(s) & = & (s_2 s_3 s_4 \cdots) \\ \sigma^3(s) & = & (s_3 s_4 s_5 \cdots) \\ \sigma^4(s) & = & (s_4 s_5 s_6 \cdots) \\ \vdots & & \end{array}$$

Notemos que la órbita positiva de un punto la obtenemos al iterar repetidamente la función. De manera similar podemos hablar de órbitas negativas al fijarnos en las preimagenes de un punto dado. Entonces tenemos la siguiente definición.

Definición 1.8. Sea $x = x_0$ un punto en X, una **órbita negativa** de x es una sucesión $\gamma^-(x) = \{x_k\}_{k=-\infty}^{0}$, donde $f(x_{k-1}) = x_k$, para $k \leq 0$.

Es posible que no existan órbitas negativas de x, incluso si existe una, no necesariamente es única. En el caso en que f es un homeomorfismo, siempre existen órbitas negativas. Así, una órbita negativa es el conjunto de puntos $x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), ...$

Ejemplo 1.9. En la función del ejemplo 1.2, $f(x) = x^2 + 1$, consideremos $x_0 = 343$. El primer punto de una órbita negativa de x_0 lo obtenemos al resolver

$$f(x_{-1}) = x_{-1}^2 + 1 = 343,$$

de donde $x_{-1} = \pm 3\sqrt{38}$. Si tomamos $x_{-1} = 3\sqrt{38}$, podemos obtener x_{-2} al resolver

$$f(x_{-2}) = x_{-2}^2 + 1 = 3\sqrt{38},$$

así, $x_{-2} = \pm\sqrt{3\sqrt{38} - 1}$. Si tomamos $x_{-2} = \sqrt{3\sqrt{38} - 1}$, con el mismo razonamiento podemos encontrar $x_{-3}, x_{-4}, ...$ De aquí es claro que la órbita negativa de $x_0 = 343$ no es única.

Ejemplo 1.10. En el caso de la función del panadero, la órbita negativa se ve de la siguiente manera

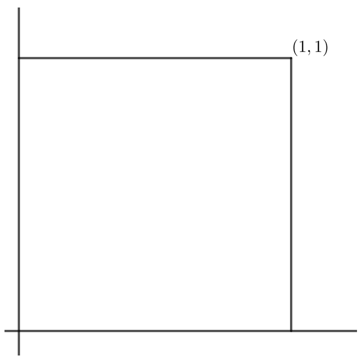


Figura 1.9: $[0, 1]^2$

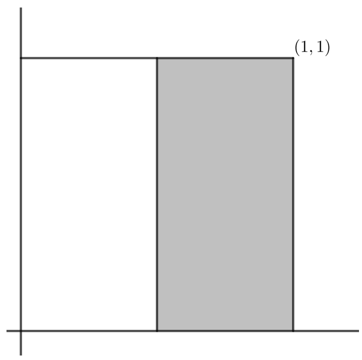


Figura 1.10

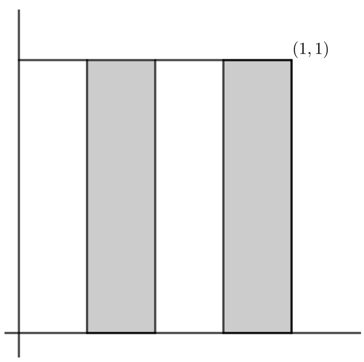


Figura 1.11

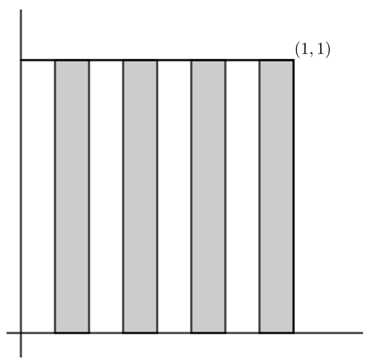


Figura 1.12

Ahora que sabemos cuáles son las órbitas positivas y negativas, podemos dar la siguiente definición.

Definición 1.11. A la sucesión $\gamma(x) = \{x_j \mid j = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ tal que $x_0 = x \in X$ y $f(x_{j-1}) = x_j$, la llamamos la **órbita completa** de x.

Tomando en cuenta los ejemplos anteriores, podemos ver que la órbita completa corresponde a la unión de una órbita negativa y la órbita positiva.

Ejemplo 1.12. Sea $s = (010011\cdots) \in \Sigma_2$. Algunos puntos de la órbita completa de s son

$$\begin{aligned}
\sigma^3(s) &= (011101\cdots)\\
\sigma^2(s) &= (001110\cdots)\\
\sigma(s) &= (100111\cdots)\\
s &= (010011\cdots)\\
\sigma^{-1}(s) &= (101001\cdots)\\
\sigma^{-2}(s) &= (010100\cdots)\\
\sigma^{-3}(s) &= (001010\cdots)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

1.2. Tipos de órbitas

"Entender el comportamiento eventual de un proceso iterativo" se reduce a estudiar las órbitas de los puntos en un sistema dinámico. Como veremos a continuación, existen distintos tipos de órbitas, cada uno de gran importancia. Probablemente, el tipo de órbita más importante sea la de un punto fijo, el cual definimos de la siguiente manera.

Definición 1.13. Decimos que un punto $x \in X$ es un **punto fijo** de f si $f(x) = x$.

Ejemplo 1.14. Sea T como en el ejemplo 1.5. Los puntos fijos de T, los obtenemos de resolver $T(x,y) = (x,y)$. Recordemos que

$$T(x,y) = \begin{cases} \left(2x, \frac{y}{2}\right) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ \left(2x-1, \frac{1+y}{2}\right) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Tenemos dos casos; $(2x, \frac{y}{2}) = (x,y)$ y $\left(2x-1, \frac{1+y}{2}\right) = (x,y)$. Sabemos que $(2x, \frac{y}{2}) = (x,y)$ si y sólo si $2x = x$ y $\frac{y}{2} = y$. De aquí se sigue que $x = 0$ y $y = 0$. Luego, $\left(2x-1, \frac{1+y}{2}\right) = (x,y)$ si y sólo si $2x - 1 = x$ y $\frac{1+y}{2} = y$. De aquí que $x = 1$ y $y = 1$. Por lo tanto, los puntos fijos de la función del panadero son $(0,0)$ y $(1,1)$.

Ejemplo 1.15. Consideremos Σ_2, como en el ejemplo 1.6, con la función shift $\sigma\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$. Sabemos que

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \cdots) = (s_1 s_2 s_3 \cdots).$$

Por lo tanto, los puntos fijos de σ son las sucesiones tales que

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \cdots) = (s_1 s_2 s_3 \cdots) = (s_0 s_1 s_2 \cdots),$$

es decir, queremos que $s_1 = s_0$, $s_2 = s_1$, $s_3 = s_2$,..., $s_n = s_{n-1}$, ... Por la definición de los elementos en Σ_2, tenemos dos opciones:

Si $s_0 = 0$, entonces $s_1 = 0$, $s_2 = 0, ...,$ $s_n = 0, ...$

Si $s_0 = 1$, entonces $s_1 = 1$, $s_2 = 1, ...,$ $s_n = 1, ...$

Por lo tanto, los puntos fijos de σ son $(000\cdots)$ y $(111\cdots)$.

El siguiente tipo de órbitas son las órbitas de puntos periódicos.

Definición 1.16. Sea $x \in X$. Diremos que x es un **punto periódico** de periodo n si $f^n(x) = x$, para algún $n > 0$.

Ejemplo 1.17. Recordemos, del ejemplo 1.3, que para $\alpha \in [0,1)$ fijo, $T\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ rota un punto en el círculo por un ángulo α. En este ejemplo se tienen dos casos; que α sea racional, o que α sea irracional. Tenemos que $T(x) = x + \alpha(mod\ 1)$.

Supongamos que $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p,q) = 1$ y $q \neq 0$. Entonces

$$T^q(x) = x + q(\frac{p}{q})(mod\ 1) = x + p(mod\ 1) = x.$$

De aquí se sigue que todos los puntos son periódicos de periodo q.

Suponiendo que α es irracional, se puede demostrar que cada punto $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tiene órbita densa (la órbita de x es densa si: para todo $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, y para todo $\varepsilon > 0$, existe un $n \in \mathbb{N}$, tal que $d(T^n(x), y) < \varepsilon$) y que T no tiene puntos periódicos.

Ejemplo 1.18. Consideremos nuevamente

$$T(x,y) = \begin{cases} \left(2x, \frac{y}{2}\right) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ \left(2x-1, \frac{1+y}{2}\right) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Calcular los puntos periódicos de periodo n es equivalente a resolver $T^n(x,y) = (x,y)$. Sea $n = 2$, tenemos los siguientes casos:

Si $0 \leq x < \frac{1}{2}$, entonces $T(x,y) = (2x, \frac{y}{2})$.

- Ahora, si $0 \leq 2x < \frac{1}{2}$, entonces

  $$T^2(x,y) = T\left(2x, \frac{y}{2}\right) = \left(4x, \frac{y}{4}\right) = (x,y)$$

  si y sólo si $4x = x$ y $\frac{y}{4} = y$. Esto implica que $(x,y) = (0,0)$, el cual es un punto fijo.

- Pero, si $\frac{1}{2} \leq 2x \leq 1$, entonces

  $$T^2(x,y) = T\left(2x, \frac{y}{2}\right) = \left(4x-1, \frac{2+y}{4}\right) = (x,y)$$

  si y sólo si $4x - 1 = x$ y $\frac{2+y}{4} = y$. De aquí se sigue que $(x,y) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ es punto periódico de periodo $n = 2$.

Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, entonces $T(x,y) = (2x-1, \frac{1+y}{2})$.

- Ahora, si $0 \leq 2x-1 < \frac{1}{2}$, entonces
$$T^2(x,y) = T\left(2x-1, \frac{1+y}{2}\right) = \left(4x-2, \frac{1+y}{4}\right) = (x,y)$$
si y sólo si $4x-2 = x$ y $\frac{1+y}{4} = y$. De aquí que $(x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ es punto periódico de periodo $n = 2$.

- Pero, si $\frac{1}{2} \leq 2x-1 \leq 1$, entonces
$$T^2(x,y) = T\left(2x-1, \frac{1+y}{2}\right) = \left(4x-3, \frac{3+y}{4}\right) = (x,y)$$
si y sólo si $4x-3 = x$ y $\frac{3+y}{4} = y$. Esto implica que $(x,y) = (1,1)$, pero $(1,1)$ es punto fijo.

Es fácil ver que $T(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ y que $T(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Por lo tanto $\{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$ es una órbita periódica de periodo $n = 2$.

El razonamiento utilizado en el ejemplo anterior, puede ayudarnos a calcular los puntos periódicos de cualquier sistema, aunque en la mayoría de los casos resulta muy complicado resolver algo de la forma $f^n(x) = x$ cuando n es muy grande.

También podemos notar que la órbita de un punto periódico tiene un número finito de elementos.

Ejemplo 1.19. Consideremos Σ_2 con la función shift σ. Para encontrar las órbitas de periodo $n = 3$ necesitamos encontrar las sucesiones que cumplan
$$\sigma^3(s_0s_1s_2\cdots) = \sigma^2(s_1s_2s_3\cdots) = \sigma(s_2s_3s_4\cdots) = (s_3s_4s_5\cdots) = (s_0s_1s_2\cdots),$$
es decir, queremos los elementos de Σ_2, tales que $s_0 = s_3$, $s_1 = s_4$, $s_2 = s_5$, $s_3 = s_6$, $s_4 = s_7, \ldots$. Las sucesiones, en Σ_2, que tienen esta forma, son las siguientes:
$$\begin{aligned}
x_1 &= (000000\cdots)\\
x_2 &= (001001\cdots)\\
x_3 &= (010010\cdots)\\
x_4 &= (011011\cdots)\\
x_5 &= (100100\cdots)\\
x_6 &= (101101\cdots)\\
x_7 &= (110110\cdots)\\
x_8 &= (111111\cdots)
\end{aligned}$$

Como vimos en el ejemplo 1.15, x_1 y x_8 son puntos fijos. Notemos que $\sigma(x_2) = x_3$, $\sigma(x_3) = x_5$, y $\sigma(x_5) = x_2$. Por lo tanto $\{x_2, x_3, x_5\}$ es una órbita periódica de periodo $n = 3$. Además $\sigma(x_4) = x_7$, $\sigma(x_7) = x_6$, y $\sigma(x_6) = x_4$. Por lo tanto, otra órbita de periodo $n = 3$ es $\{x_4, x_7, x_6\}$.

Para Σ_2, con la función shift σ, los puntos periódicos de periodo n tienen la forma
$$(s_0s_1s_2\cdots s_{n-1}s_0s_1\cdots s_{n-1}\cdots).$$

También podemos encontrarnos con puntos que por sí solos no son ni puntos fijos ni puntos periódicos, pero que algún punto de su órbita sí lo sea. De aquí la siguiente definición.

Definición 1.20. Sea $x \in X$. Decimos que x es **eventualmente periódico** de periodo n si x no es periódico pero existe un $m > 0$ tal que $f^{n+i}(x) = f^i(x)$, para todo $i \geq m$. Es decir, $f^i(x)$ es periódico para $i \geq m$.

Ejemplo 1.21. Consideremos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de tal manera que $f(x) = x^2$. Sea $x = 1$. Entonces $x = 1$ es punto fijo de f, pues $f(1) = 1$. Ahora, tomemos $x = -1$, entonces $f(-1) = (-1)^2 = 1$, y $f^2(-1) = f(1) = 1$. Por lo tanto, $x = -1$ es un punto eventualmente fijo para f.

Ejemplo 1.22. Para la función shift σ, un punto eventualmente fijo tiene la forma $(s_0 s_1 \cdots s_{n-1} s_n s_n s_n \cdots)$, y un punto eventualmente periódico tiene la forma $(s_0 s_1 \cdots s_n s_{n+1} s_{n+2} \cdots s_{n+m-1} s_{n+1} s_{n+2} \cdots)$.

1.3. El conjunto $\omega-$límite

Los conjuntos que nos describen la dinámica de un sistema son los conjuntos límite. A continuación daremos su definición formal y probaremos algunas de sus propiedades que nos serán de gran utilidad más adelante.

Definición 1.23. Sea $\gamma^+(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^n(x)$ la órbita positiva de $x \in X$. El conjunto $\omega-$**límite** de x es el conjunto

$$\omega(x) = \{y \in X \mid f^{n_k}(x) \to y, \text{ para algún } n_k \to \infty\}.$$

El conjunto $\omega-$límite es entonces el conjunto de puntos límite de las subsucesiones de la órbita de x.

Ejemplo 1.24. Consideremos $f : X \to X$, una función continua, y sea $x \in X$ un punto fijo de f. Sabemos que la órbita de un punto fijo es la sucesión constante $\{x, x, x, ...\}$. Es claro que $\omega(x) = \{x\}$.

Ahora, sea $y \in X$ un punto periódico de periodo n de f. La órbita de y es $\gamma(y) = \{y_0, y_1, ..., y_{n-1}, y_0, y_1, ...\}$, donde $y_n = f^n(y)$, $n \geq 0$. En el caso de las órbitas periódicas, es claro que $\omega(y) = \gamma(y)$. Más aún, $\omega(y) = \omega(y_n)$ para toda $n \geq 0$.

Ejemplo 1.25. Consideremos f como en el ejemplo 1.4. Sea $z = re^{i\theta}$, donde $|z| = r$. En el caso en el que $r < 1$, sucede algo similar a lo que se muestra en la figura 1.2. Como $r < 1$, tenemos que $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto, $\omega(z) = \{0\}$.

Ahora, si $r > 1$, sucede algo similar a lo que se muestra en la figura 1.3. Como $r > 1$, tenemos que $r^n \to \infty$, cuando $n \to \infty$, por lo tanto $\omega(z) = \infty$.

A continuación, presentamos algunas propiedades del conjunto $\omega-$límite con su demostración.

Proposición 1.2. *Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Entonces para todo $x \in X$, se tiene que $\omega(x) \neq \varnothing$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Como X es compacto, entonces es secuencialmente compacto, es decir, toda sucesión tiene una subsucesión convergente. Así, la sucesión $\{f^n(x)\}_{n\geq 0}$, es decir, la órbita de x, tiene una subsucesión que converge, digamos a $y_0 \in X$. Por lo tanto $y_0 \in \omega(x)$. ■

Proposición 1.3. *Sea $f : X \to X$ una función continua. Para todo $x \in X$, $\omega(x)$ es cerrado.*

Demostración. Si $\omega(x) = \varnothing$, entonces no hay nada que probar.

Supongamos que $\omega(x) \neq \varnothing$. Sea $x_0 \in X$ y $\{y_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión contenida en $\omega(x_0)$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Basta ver que $y_0 \in \omega(x_0)$, pues sabemos que un conjunto es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos límite.

Tenemos que $\{y_n\}_{n\geq 1}$ converge a y_0, entonces para $\varepsilon_1 = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_{n_1}, y_0) < \frac{\varepsilon_1}{2}$.

Como $y_{n_1} \in \omega(x_0)$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{k_1}(x_0) \in B\left(y_{n_1}, \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \subset B(y_0, \varepsilon_1).$$

Para $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ tal que $d(y_{n_2}, y_0) < \frac{\varepsilon_2}{2}$.

Como $y_{n_2} \in \omega(x_0)$, existe $k_2 > k_1$ tal que

$$f^{k_2}(x_0) \in B\left(y_{n_2}, \frac{\varepsilon_2}{2}\right) \subset B(y_0, \varepsilon_2).$$

Siguiendo este razonamiento, encontramos una sucesión creciente de naturales $\{k_j\}$ tal que para cada j,

$$f^{k_j}(x_0) \in B(y_0, \varepsilon_j), \quad \varepsilon_j = \frac{1}{j}.$$

Por lo tanto, $y_0 \in \omega(x_0)$. ■

Es claro que cuando X es compacto, $\omega(x)$ también lo es.

Proposición 1.4. *Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Para todo $x \in X$, se tiene que $f(\omega(x)) = \omega(x)$, es decir, $\omega(x)$ es invariante bajo f.*

Demostración. Probamos la doble contención. Primero tomemos $x_0 \in X$ y consideremos su conjunto $\omega-$límite, $\omega(x_0)$. Sea $y_0 \in f(\omega(x_0))$. Entonces existe $z_0 \in \omega(x_0)$ tal que $f(z_0) = y_0$. Además, existe una sucesión de números naturales $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = z_0.$$

Así, por la continuidad de f, tenemos que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i+1}(x_0) = f(z_0) = y_0,$$

es decir, y_0 pertenece a $\omega(x_0)$. Entonces $f(\omega(x_0)) \subset \omega(x_0)$.

Ahora consideremos $y_0 \in \omega(x_0)$, y tomemos una sucesión de números naturales $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = y_0.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que cada n_i es mayor o igual que 2. Dado que X es compacto, y contiene a la sucesión $\{f^{n_i-1}(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$, existen una subsucesión de $\{n_i - 1\}_{i=1}^{\infty}$ y un punto $z_0 \in X$ tales que

$$\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0) = z_0.$$

Así $z_0 \in \omega(x_0)$. Además

$$f(z_0) = f\left(\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0)\right) = \lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}}(x_0) = y_0.$$

Entonces $y_0 \in f(\omega(x_0))$, es decir $\omega(x_0) \subset f(\omega(x_0))$. ■

Proposición 1.5. *Sea $f : X \to X$ una función continua, donde X es un espacio métrico compacto. Sea $x_0 \in X$ y sea $U \subset X$ una vecindad de $\omega(x_0)$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $f^n(x_0) \in U$.*

Demostración. Sea U un conjunto abierto tal que $\omega(x_0) \subset U$. Como U es abierto, $X\backslash U \subset X$ es cerrado, y por lo tanto compacto. Si

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, f^n(x_0) \in X\backslash U\}$$

tiene cardinalidad finita, entonces existe una sucesión creciente $n_1 < n_2 < \cdots$, $n_i \in \mathbb{N}$, tal que las iteraciones $f^{n_i}(x_0)$ permanecen en $X\backslash U$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{f^{n_i}(x_0)\}$ converge a un punto $y_0 \in X\backslash U$. De aquí se sigue que $y_0 \in \omega(x_0)$, lo cual es una contradicción, pues $y_0 \notin U$.

Por lo tanto A es finito. ■

La proposición 1.5 nos dice que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \omega(x)) = 0$, donde $x_n = f^n(x)$.

Resumiendo, si (X, d) es un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ es una función continua, entonces el conjunto $\omega-$límite de $x \in X$ es no vacío, compacto, invariante bajo f, y $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \omega(x)) = 0$, donde $x_n = f^n(x)$.

De manera similar, si consideramos ahora las órbitas negativas, podemos definir el conjunto de los puntos de acumulación de las subsucesiones de una órbita negativa. A este conjunto lo llamaremos $\alpha-$límite.

Definición 1.26. Sea $\gamma^-(x) = \{x_k\}_{k=-\infty}^{0}$, donde $f(x_{k-1}) = x_k$, una órbita negativa de $x = x_0 \in X$. El conjunto $\alpha-$**límite** de x_0 es el conjunto

$$\alpha(x) = \{y \in X \mid x_{n_k} \to y, \text{ para algún } n_k \to -\infty\}.$$

Las mismas propiedades que presentamos para el conjunto $\omega-$límite se cumplen para el conjunto $\alpha-$límite. Es decir, si (X, d) es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua, entonces el conjunto $\alpha-$límite es no vacío, compacto e invariante bajo f.

Capítulo 2

Conjuntos Internamente Cadena Transitivos

En su intento por describir los conjuntos de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias a un nivel topológico, Conley introduce el concepto de **cadena recurrencia**. Se ha encontrado relación entre el concepto de cadena recurrencia y la estructura de los conjuntos atractores. La teoría que se ha desarrollado a partir del trabajo de Conley ha sido muy útil en varios campos. Por ejemplo, Hirsch introduce el concepto de conjuntos Internamente Cadena Transitivos, y con estos caracteriza la propiedad de persistencia uniforme.

En este capítulo, desarrollaremos la herramienta necesaria para definir los conjuntos Internamente Cadena Transitivos, daremos algunos ejemplos y hablaremos de su relación con los conjuntos $\omega-$límite y $\alpha-$límite.

Como en el capítulo anterior (X, d) es un espacio métrico, y $f : X \to X$ es una función continua.

2.1. Conjuntos Cadena

La palabra *cadena* nos sugiere que necesitamos alguna manera de relacionar puntos, o en este contexto, conectarlos. Por eso damos la siguiente definición, que será fundamental al hablar de los conjuntos Internamente Cadena Transitivos.

Definición 2.1. Sea $\{x_1, ...x_m\}$, $m > 1$, una sucesión finita de puntos en X, de tal forma que, para cualquier $\varepsilon > 0$, $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$, $1 \leq i \leq m-1$. Decimos que la sucesión $\{x_1, ...x_m\}$ es una $\varepsilon-$**cadena** que conecta x_1 con x_m.

Ejemplo 2.2. Sea $x \in X$, sea $f\colon X \to X$ continua. Consideremos $\{x_1 = x, ..., x_m\}$, con $x_i = f^{i-1}(x)$, $1 \leq i \leq m$, es decir, los primeros m puntos de la órbita positiva de x. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Es claro que $\{x_1 = x, ..., x_m\}$ es una $\varepsilon-$cadena conectando x_1 con x_m, pues $f(x_i) = x_{i+1}$. Por lo tanto $d(f(x_i), x_{i+1}) = 0 < \varepsilon$, para $1 \leq i \leq m-1$.

Más aún, supongamos que $x_1 = x$ es un punto periódico de periodo m. Por un argumento similar al anterior, la órbita periódica de x es una $\varepsilon-$cadena que conecta x_1 con x_i, para $1 \leq i \leq m$. Es decir, podemos conectar a x_1 con cada punto de su órbita, incluso consigo mismo.

Ejemplo 2.3. Sea $\varepsilon = 1/2^n$, por la proposición 1.1, dos puntos $s, t \in \Sigma_2$ cumplen con $d[s,t] \leq 1/2^n = \varepsilon$, si $s_k = t_k$ para todo $k \leq n$. Sea $\{s_1, ..., s_5\}$ con

$$\begin{aligned} s_1 &= (0100100010\cdots) \\ s_2 &= (1001000101\cdots) \\ s_3 &= (0010001011\cdots) \\ s_4 &= (0100010111\cdots) \\ s_5 &= (1000101101\cdots) \end{aligned}$$

Entonces, con la función σ, $\{s_1, ..., s_5\}$ es una $1/2^5-$cadena que conecta s_1 con s_5.

Ejemplo 2.4. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ con la métrica usual, dado por $X = X_1 \bigcup X_2$, donde

$$X_1 = \{(n,0) : n \geq 1\} \quad \text{y} \quad X_2 = \{(n,1/n) : n \geq 1\}$$

y definimos $f \colon X \to X$ por

$$f(n,0) = (n+1,0) \quad \text{y} \quad f(n,1/n) = (1,0).$$

Sea $(m,0) \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Por la Propiedad Arquimedia existe $n > m$ lo suficientemente grande, de tal forma que $1/n < \varepsilon$. Consideremos la sucesión

$$\{(m,0),(m+1,0),...,(n-1,0),(n,1/n)\}$$

Tenemos que $d(f(m,0),(m+1,0)) = 0 < \varepsilon$, pues $f(m,0) = (m+1,0)$. De aquí es fácil ver que

$$d(f(m,0),(m+1,0)) = d(f(m+1,0),(m+2,0)) = ... = d(f(n-2),0),(n-1,0)) = 0.$$

Además

$$d(f(n-1,0),(n,1/n)) = \sqrt{(n-n)^2 + (0-1/n)^2} = \sqrt{1/n^2} = 1/n < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la sucesión

$$\{(m,0),(m+1,0),...,(n-1,0),(n,1/n)\}$$

es una $\varepsilon-$cadena que conecta $(m,0)$ con $(n,1/n)$.

En sistemas dinámicos, la idea de un punto recurrente, es que en algún momento, bajo iteraciones, la órbita vuelve o se aproxima al mismo punto. En este contexto definimos algo similar con la ayuda de las $\varepsilon-$cadenas.

Definición 2.5. Sea $x \in X$. Decimos que x es un **punto cadena recurrente** si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\varepsilon-$cadena que conecta a x consigo mismo. Al conjunto de puntos cadena recurrente de X bajo f lo denotamos $R(X,f)$.

Ejemplo 2.6. Consideremos las rotaciones en el círculo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Recordemos del ejemplo 1.17 que en el caso de una rotación por un ángulo racional, todos los puntos son periódicos, entonces, por el ejemplo 2.2, todos los puntos son cadena recurrente.

En el caso de una rotación por un ángulo irracional, sabemos que las órbitas son densas, por lo tanto, una $\varepsilon-$cadena que conecte un punto consigo mismo, es la órbita del punto bajo T. Esta $\varepsilon-$cadena puede ser muy larga, pero por el Principio del Buen Orden, podemos asegurar que existe la más pequeña.

Ejemplo 2.7. Sea $X = X_1 \bigcup X_2$, como en el ejemplo 2.4. Recordemos que

$$X_1 = \{(n, 0) : n \geq 1\} \quad \text{y} \quad X_2 = \{(n, 1/n) : n \geq 1\}$$

y que $f \colon X \to X$ está definida por

$$f(n, 0) = (n + 1, 0) \quad \text{y} \quad f(n, 1/n) = (1, 0).$$

Sea $(m, 0) \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Por la Propiedad Arquimedia existe $n > m$ lo suficientemente grande, de tal forma que $1/n < \varepsilon$. Entonces, la sucesión

$$\{(m, 0), (m + 1, 0), ..., (n - 1, 0), (n, 1/n), (1, 0), ..., (m, 0)\}$$

es una $\varepsilon-$cadena que conecta $(m, 0)$ consigo mismo. Es decir, cada $(m, 0) \in X_1$ es un punto cadena recurrente.

El siguiente resultado puede resultar muy importante al momento de buscar el conjunto de puntos cadena recurrente de un conjunto.

Proposición 2.1. *El conjunto $R(X, f)$ es cerrado y $R(X, f) \subset \overline{f(X)}$.*

Demostración. Sea $y \in X$ un punto de acumulación de $R(X, f)$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces por la continuidad de f en y, existe un $\delta > 0$, de tal manera que si $z \in X$ es un punto con $d(y, z) < \delta$, entonces se cumple que $d(f(y), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sin pérdida de generalidad podemos tomar $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Consideremos $z \in B(y, \delta) \cap (R(X, f) \backslash \{y\})$. Como $z \in R(X, f)$ podemos encontrar una $\frac{\varepsilon}{2}-$cadena, $\{z_1 = z, z_2, ...z_{m-1}, z_m = z\}$, que conecta z consigo mismo. De aquí que $d(f(z_i), z_{i+1}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Veamos que $y \in R(X, f)$, es decir, veamos que para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar una sucesión finita, $\{y_1 = y, y_2, ..., y_{n-1}, y_n = y\}$, tal que, para $i = 1, ..., n - 1$,

$$d(f(y_i), y_{i+1}) < \varepsilon.$$

Notemos que

$$d(f(y), z_2) \leq d(f(y), f(z)) + d(f(z), z_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

además,

$$d(f(z_{m-1}), y) \leq d(f(z_{m-1}), z) + d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\{y_1 = y, y_2 = z_2, ..., y_{n-1} = z_{m-1}, y_n = y\}$ es una $\varepsilon-$cadena que conecta y consigo mismo. De aquí que $R(X, f)$ es cerrado.

Por construcción, tenemos $R(X, f) \subset f(X)$, y por lo tanto $\overline{R(X, f)} \subset \overline{f(X)}$, pero $\overline{R(X, f)} = R(X, f)$ por ser cerrado. Entonces $R(X, f) \subset \overline{f(X)}$. ■

Es posible que todos los puntos de un conjunto sean cadena recurrente. En esos casos utilizaremos la siguiente definición.

Definición 2.8. Sea $A \subset X$. Decimos que A es un **conjunto cadena recurrente** si todos sus puntos son cadena recurrente, es decir $R(A, f) = A$.

Ejemplo 2.9. Siguiendo con el ejemplo de las rotaciones en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Para el caso en que el ángulo es racional, vimos en el ejemplo 2.2 que todos los puntos son cadena recurrente. Por lo tanto, $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Sea $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. En el caso en el que el ángulo es irracional, vimos que las órbitas son densas, es decir, para todo $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, y para todo $\varepsilon > 0$, existe un $n \in \mathbb{N}$, tal que $d(T^n(x), y) < \varepsilon$. De aquí que existe un k, de tal manera que $d(T^k(x), x) < \varepsilon$. Así $\{x_1 = x, ..., x_{m-1} = T^{k-1}(x), x_m = x\}$ es una $\varepsilon-$cadena que conecta a x consigo mismo. Pero esto se cumple para cualquier x. Por lo tanto $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Ejemplo 2.10. En el ejemplo 2.7, notemos que $f(X) = X_1$. Por la proposición 2.1, tenemos que $X_1 \subset R(X, f) \subset \overline{f(X)} = \overline{X_1}$, pero X_1 es cerrado en X, por lo tanto $R(X, f) = X_1$, es decir X_1 es un conjunto cadena recurrente en X.

Hasta ahora, unicamente hemos pedido que existan $\varepsilon-$cadenas que conectan puntos, y no hemos pedido ninguna condición para los puntos de dichas sucesiones. La palabra *internamente*, nos da una idea de lo que pediremos para las $\varepsilon-$cadenas. De aquí la siguiente definición.

Definición 2.11. Sea $A \subset X$ no vacío e invariante bajo f, es decir, $f(A) = A$. Decimos que A es un conjunto **Internamente Cadena Recurrente** (ICR) si cada punto $x \in A$ es cadena recurrente a través de puntos de A.

Ejemplo 2.12. Sea $f\colon X \to X$ una función continua, y sean $x_1, x_2 \in X$ dos puntos fijos de f. Sea $A = \{x_1, x_2\}$. Es claro que, para todo $\varepsilon > 0$, una $\varepsilon-$cadena que conecta x_i consigo mismo, $i = 1, 2$, es la sucesión constante $\{x_i, x_i, ..., x_i\}$. De esta manera x_1 y x_2 son puntos cadena recurrente a través de puntos de A, por lo tanto A es ICR.

Ahora, tenemos todas las herramientas que necesitamos para definir los conjuntos Internamente Cadena Transitivos. Para esto, necesitamos que se cumpla una condición más fuerte que enunciamos a continuación.

Definición 2.13. Sea $A \subset X$ no vacío e invariante bajo f. Decimos que A es un conjunto **Internamente Cadena Transitivo** (ICT) si para cualquier par $a, b \in A$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\varepsilon-$cadena, de puntos en A, que conecta a con b.

Ejemplo 2.14. Consideremos las rotaciones en el círculo. En el caso de que el ángulo de rotación sea irracional, sabemos que cada punto tiene órbita densa. Sea $x_n = f^n(x)$, $n \geq 0$. Entonces $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ es una $\varepsilon-$cadena que conecta a x_1 con x_m.

Ejemplo 2.15. Es claro que las órbitas periódicas son también conjuntos ICT.

Una pregunta que nos podemos hacer inmediatamente es ¿qué relación existe entre los conjuntos ICR e ICT? La respuesta es la siguiente:

Proposición 2.2. *Sea $A \subset X$ un conjunto ICT para f, entonces A es ICR.*

Demostración. Sean $a, b \in A$. Como A es ICT, existen dos $\varepsilon-$cadenas en A; una que conecta a con b, y otra que conecta b con a, digamos $\{x_1 = a, ..., x_{m-1}, x_m = b\}$, y $\{x'_1 = b, ..., x'_{n-1}, x'_n = a\}$, respectivamente. Entonces $\{x_1 = a, ..., x_{m-1}, x'_1 = b, ..., x'_{n-1}, x'_n = a\}$ es una $\varepsilon-$cadena en A que conecta a consigo mismo, y de manera similar, $\{x'_1 = b, ..., x'_{n-1}, x_1 = a, ..., x_{m-1}, x_m = b\}$ es una $\varepsilon-$cadena en A que conecta b consigo mismo. Por lo tanto A es ICR. ■

El recíproco es falso, como podemos ver con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.16. Sea $f\colon X \to X$ una función continua, y sean $x_1, x_2 \in X$ dos puntos fijos de f. Sea $A = \{x_1, x_2\}$. En el ejemplo 2.12, vimos que A es ICR, pero no hay forma de conectar x_1 con x_2 a través de puntos de A. Por lo tanto, A no puede ser ICT

Queremos saber qué necesita un conjunto ICR para ser ICT. Resulta que los conjuntos ICT cumplen con una propiedad que no todos los conjuntos ICR tienen.

Definición 2.17. Sea $M \subset X$ compacto e invariante. Decimos que M es **invariantemente conexo** si no es la unión de dos conjuntos no vacíos, cerrados, disjuntos e invariantes.

Ejemplo 2.18. Consideremos el círculo con las rotaciones. Sabemos que el círculo es conexo, por lo tanto no es la unión de dos conjuntos no vacíos, cerrados y disjuntos. Más aún, no es la unión de dos conjuntos no vacíos, cerrados, disjuntos e invariantes; por lo tanto es invariantemente conexo.

De aquí, es claro que ser conexo implica ser invariantemente conexo. Pero el recíproco no se cumple.

Ejemplo 2.19. Sea $A = \{a, b\} \subset X$ y sea f una función continua, de tal manera que $f(a) = b$ y $f(b) = a$. Es claro que $\{a\}$,$\{b\}$ es una separación de A, es decir, A es no conexo. Pero $f(a) = b$, y $b \notin \{a\}$, por lo tanto $\{a\}$ no es invariante. Similarmente para $\{b\}$. Por lo tanto, A es invariantemente conexo.

Antes de responder la pregunta de qué necesitan los conjuntos ICR para ser ICT, veamos el siguiente resultado que relaciona los conjuntos ICT con los invariantemente conexos.

Recordemos la métrica de Hausdorff. Sean A y B dos subconjuntos compactos de X, no vacíos. La distancia de Hausdorff entre A y B se define como

$$d_H(A, B) := \text{máx}(\sup\{d(x, B) : x \in A\}, \sup\{d(x, A) : x \in B\})$$

Proposición 2.3. *Todo $A \subset X$ compacto e ICT es invariantemente conexo.*

Demostración. Sea $A \subset X$ compacto e ICT. Supongamos que A no es invariantemente conexo, es decir, que existen U y V no vacíos, disjuntos, cerrados e invariantes, tales que $A = U \cup V$.

Sean $u \in U$ y $v \in V$. Sea $\varepsilon < 0$, como A es ICT, existe una $\varepsilon-$cadena, $\{x_1 = u, ..., x_m = v\}$, de puntos en A que conecta u con v.

Como U y V son disjuntos, $d_H(U, V) > 0$. Tomemos $\varepsilon < d_H(U, V)$, y sea $k = \text{mín}\{n \mid x_n \in V\}$. Es claro que $k > 1$ pues $x_1 \in U$, pero $x_1 \notin V$.

Por ser $\{x_1, ..., x_m\}$ una $\varepsilon-$cadena, tenemos que $d(f(x_{k-1}), x_k) < \varepsilon$, pero $f(x_{k-1}) \in U$ (pues U es invariante bajo f) y $x_k \in V$. Esto es una contradicción, por la forma en que tomamos ε. Por lo tanto A es invariantemente conexo. ■

Antes de demostrar el Teorema importante, demostramos el siguiente resultado, el cual utilizaremos más adelante.

Proposición 2.4. *Sea (X, d) un espacio métrico, y $f\colon X \to X$ una función continua. Sea $A \subset X$ de tal manera que $f(A) = A$, entonces $f(\overline{A}) = \overline{A}$.*

Demostración. Probemos la doble contención. Por la continuidad de f, se cumple que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, pero $f(A) = A$. Entonces $f(\overline{A}) \subset \overline{A}$. Por otro lado, sea $x \in \overline{A}$, entonces existe una sucesión $\{y_n\}$ de puntos en A, de tal manera que $y_n \to x$. Por la continuidad de f, se cumple que $f(y_n) \to f(x)$. Por la invarianza de A, $f(y_n) \in A$, por lo tanto $f(x) \in \overline{A}$. De aquí se sigue que $\overline{A} \subset f(\overline{A})$. Entonces $\overline{A}$ es invariante bajo f. ■

Por lo anterior, notamos que la conexidad juega un papel importante en los conjuntos ICT. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Sea $M \subset X$ compacto, conexo e ICR. Entonces M es ICT.*

Demostración. Sea $M \subset X$ compacto, conexo e ICR. Consideremos $a \in M$ y $\varepsilon > 0$.

Sea $A = \{x \in M \,|\, \text{existe una } \varepsilon\text{−cadena conectando } a \text{ con } x\}$. Entonces $A \neq \varnothing$, pues $a \in A$. Sea $z \in A$. Entonces existe una $\varepsilon-$cadena $\{z_1 = a, ..., z_{m-1}, z_m = z\}$ que conecta a con z. Notemos que

$$\lim_{x \to z} d(f(z_{m-1}), x) = d(f(z_{m-1}), z) < \varepsilon.$$

De aquí que existe una vecindad V de z, tal que para toda $x \in V$ existe una $\varepsilon-$cadena que conecta a con x. Entonces $V \subset A$, y por lo tanto, A es abierto.

Ahora veamos que A es invariante bajo f. Tomemos $z \in \overline{A}$, como f es continua, podemos encontrar $y \in A$ de tal forma que $d(f(y), f(z)) < \varepsilon$. Como $y \in A$, existe una $\varepsilon-$cadena que conecta a con y, $\{y_1 = a, ..., y_{n-1}, y_n = y\}$. Observemos que $\{y_1 = a, ..., y_n = y, y_{n+1} = f(z)\}$ es una $\varepsilon-$cadena que conecta a con $f(z)$, por lo tanto $f(\overline{A}) \subset A$. Esto implica que $f(A) \subset A$.

Sea $\varepsilon < 0$, como f es uniformemente continua en M, existe $\delta \in (0, \varepsilon/2)$ tal que, si $d(x, f(y)) < \delta$, entonces $d(f(x), f^2(y)) < \varepsilon/2$. Sea $x \in A$, como M es invariante debe existir $y \in M$ tal que $f(y) = x$. Además, existe una $\delta-$cadena en M que conecta a y consigo mismo, digamos $\{y_1 = y, y_2, ..., y_n = y\}$. Notemos que $d(f(y), y_2) < \delta$ implica que $d(f^2(y), f(y_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, $d(f(y_2), y_3) < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$, y por lo tanto

$$d(f^2(y), y_3) < d(f^2(y), f(y_2)) + d(f(y_2), y_3) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, $\{x = f(y), y_3, ..., y_n = y, f(y) = x\}$ es una $\varepsilon-$cadena que conecta x consigo mismo pasando por y. Dado que $x \in A$, existe una $\varepsilon-$cadena $\{x_1 = a, ..., x_n = x\}$ que conecta a con x. De aquí que $\{x_1 = a, ..., x = f(y), y_3, ..., y\}$ es una $\varepsilon-$cadena que conecta a con y. Así, $A \subset f(A)$.

Recordemos que $f(\overline{A}) \subset A$. Como A es invariante, por la proposición 2.4, $\overline{A}$ es invariante, es decir $f(\overline{A}) = \overline{A}$, por lo tanto $\overline{A} \subset A$. Es decir, A es cerrado.

Tenemos que $A \subset M$ es abierto, es cerrado y $A \neq \varnothing$, pero M es conexo, por lo tanto $A = M$. Entonces, para cada $x \in M$ podemos encontrar una $\varepsilon-$cadena conectando a con x. Como a y ε los elegimos arbitrariamente, M es ICT. ■

2.2. Conjuntos ICT y los conjuntos $\omega-$límite

Ya hemos visto algunos ejemplos de conjuntos ICT, y algunas de sus propiedades. Ahora, lo que queremos hacer es caracterizar los conjuntos ICT.

Proposición 2.5. *Sea $M \subset X$ compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Dado un $\varepsilon > 0$, existe una $\delta-$vecindad, V de M, tal que si $u, v \in V$ con $d(u,v) < \delta$, entonces $d(f(u), f(v)) < \varepsilon$.*

Demostración. Tenemos que $f|_M$ es uniformemente continua. Por tanto, para todo $\varepsilon < 0$, existe $\delta_\varepsilon < 0$ de tal forma que si $x, y \in M$ son dos puntos con $d(x,y) < \delta_\varepsilon$, entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$. Por otro lado, por la continuidad de f, para cada $\varepsilon < 0$ y $x \in M$ existe $\delta_x > 0$ tal que $f(B(x), \delta_x) \subset B(f(x), \varepsilon/3)$.

Para cada $x \in M$ y $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta'_x = \min\{\delta_x, \delta_\varepsilon/3\}$. Consideremos $A = \{B(x, \delta'_x)\}_{x \in M}$, entonces A es una cubierta abierta de M. Como M es compacto, existe una subcubierta finita

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta'_{x_i}) \supset M.$$

Sean $a, b \in U$ tales que $d(a,b) < \delta_\varepsilon/3$. Entonces existe $x_1, x_2 \in M$, tales que $a \in B(x_1, \delta'_{x_1})$ y $b \in B(x_2, \delta'_{x_2})$. Entonces

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, a) + d(a,b) + d(b, x_2) < \frac{\delta_\varepsilon}{3} + \frac{\delta_\varepsilon}{3} + \frac{\delta_\varepsilon}{3} < \delta_\varepsilon,$$

por lo tanto $d(f(x_1), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Por otro lado

$$d(f(a), f(b)) \leq d(f(a), f(x_1)) + d(f(x_1), f(x_2)) + d(f(x_2), f(b)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Como U es abierto, existe una δ^*-vecindad de M enteramente contenida en U. Sea $\delta = \{\delta^*, \delta_\varepsilon/3\}$. Consideremos V la $\delta-$vecindad de M. Entonces para $u, v \in V$ con $d(u,v) < \delta$ se cumple que $d(f(u), f(v) < \varepsilon$. ■

En los preliminares definimos los conjuntos $\omega-$límite, y se comentó un poco sobre su importancia en los sistemas dinámicos. Ahora, veremos la importancia de los conjuntos ICT por su relación con los conjuntos $\omega-$límite.

Proposición 2.6. *Sea $f : X \to X$ una función continua. Entonces el conjunto $\omega-$límite ($\alpha-$límite) de cualquier órbita positiva (negativa) precompacta es ICT.*

Demostración. Sea $x \in X$, y supongamos que x tiene una órbita positiva precompacta $\gamma^+(x) = \{x_n\}$, donde $x_n = f^n(x)$. Llamemos ω al conjunto $\omega-$límite de x. Entonces, ω es no vacío, compacto, invariante, y $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \omega) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$, por la proposición 2.5, existe U, una $\delta-$vecindad de ω, con la propiedad que para $u, v \in U$ con $d(u,v) < \delta$, se cumple que $d(f(u), f(v)) < \varepsilon/3$.

Tomemos dos puntos arbitrarios $a, b \in \omega$, veamos que existe una $\varepsilon-$cadena que conecta a con b. Como $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \omega) = 0$, existe $N > 0$ tal que $x_n \in U$ para toda $n \geq N$. Por lo anterior podemos encontrar $k > m \geq N$ tales que $d(x_m, f(a)) < \varepsilon/3$ y $d(x_k, b) < \varepsilon/3$. Así, la sucesión

$$\{y_0 = a, y_1 = x_m, ..., y_{k-m} = x_{k-1}, y_{k-m+1} = b\}$$

es una $\varepsilon/3-$cadena en X que conecta a con b.

Ahora, para cada $y_i \in U$, $i = 1, ..., k-m$, podemos encontrar un $z_i \in \omega$ tal que

$d(z_i, y_i) < \delta < \varepsilon/3$. Entonces, si tomamos $z_0 = a$ y $z_{k-m+1} = b$, tenemos que para $i = 0, 1, ..., k-m$

$$d(f(z_i), z_{i+1}) \leq d(f(z_i), f(y_i)) + d(f(y_i), y_{i+1}) + d(y_{i+1}, z_{i+1})$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

Por lo tanto $\{z_0, ..., z_{k-m+1}\}$ es una $\varepsilon-$cadena en ω que conecta a con b. Así, ω es ICT. Utilizando un argumento similar, lo podemos demostrar para el conjunto $\alpha-$límite de órbitas negativas precompactas. ∎

Hasta aquí hemos trabajado con órbitas, y a partir de ellas hemos obtenido conjuntos ICT y conjuntos $\omega-$límite. La siguiente definición será de gran utilidad para caracterizar los conjuntos ICT.

Definición 2.20. Sea $S : X \to X$ una función continua. Una sucesión $\{x_n\}$ en X es una **pseudo-órbita asintótica** de S si

$$\lim_{n\to\infty} d(S(x_n), x_{n+1}) = 0.$$

El conjunto $\omega-$límite de $\{x_n\}$ es el conjunto de límites de subsucesiones.

Ejemplo 2.21. El ejemplo más sencillo de una pseudo-órbita asintótica es una órbita. De aquí que:

1. Las órbitas de puntos fijos,
2. las órbitas de puntos periódicos,

son pseudo-órbitas asintóticas.

Una pseudo-órbita asintótica es entonces una sucesión que se comporta como si fuera una órbita. Así, de manera similar a las órbitas precompactas, podemos decir lo siguiente de los conjuntos $\omega-$límite de las pseudo-órbitas asintóticas precompactas.

Proposición 2.7. *El conjunto $\omega-$límite de cualquier pseudo-órbita asintótica precompacta de una función continua $S : X \to X$ es no vacío, compacto, invariante e ICT.*

Demostración. Sea $\mathbb{Z}_+$ el conjunto de los números enteros no negativos, y consideremos $\overline{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. Para cualquier función continua y estrictamente creciente, $\phi : [0, \infty) \to [0, 1)$, con $\phi(0) = 0$ y $\phi(\infty) = 1$, podemos definir una métrica ρ en $\overline{\mathbb{Z}}_+$, como

$$\rho(m_1, m_2) = |\phi(m_1) - \phi(m_2)|$$

para cualesquiera $m_1, m_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Entonces $\overline{\mathbb{Z}}_+$ es compactificado.

Sea $\{x_n : n \geq 0\}$ una pseudo-órbita asintótica precompacta de $S : X \to X$, y llamemos ω a su conjunto $\omega-$límite. Consideremos el subespacio

$$Y = (\{\infty\} \times X) \cup \{(n, x_n) : n \geq 0\}$$

del espacio métrico $(\overline{\mathbb{Z}}_+ \times Y, \overline{d})$, donde $\overline{d} = d + \rho$.

Veamos que $\{(n, x_n) : n \geq 0\}$ tiene la topología discreta. Sea $(n, x_n) \in Y$, y sean $\varepsilon_1 = \rho(n-1, n)$, $\varepsilon_2 = \rho(n, n+1)$. Tomemos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Veamos que $B((n, x_n), \varepsilon)$

tiene un solo punto. Sea $(m, x_m) \in B((n, x_n), \varepsilon)$, entonces $\overline{d}((m, x_m), (n, x_n)) < \varepsilon$, por lo que $\rho(m, n) < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m \geq n$. Como ϕ es estrictamente creciente, se tiene que $\rho(m, n) \geq \rho(n, n+1)$. Así

$$\varepsilon > \rho(m, n) \geq \rho(n, n+1) = \varepsilon_2 > \varepsilon,$$

por lo tanto $m = n$.

Consideremos la función $g : Y \to Y$, definida de la siguiente manera

$$g(n, x_n) = (n+1, x_{n+1})$$

$$g(\infty, x) = (\infty, S(x)).$$

Como $\{(n, x_n) : n \geq 0\}$ tiene la topología discreta, se sigue que g es continua en $\{(n, x_n) : n \geq 0\}$ y, por la continuidad de S, también es continua en $\{\infty\} \times X$. Ahora, tomemos $U = B((\infty, x), \delta)$. Sea $(n, x_n) \in U$, entonces

$$\rho(n, \infty) < \delta \quad y \quad d(x_n, x) < \delta,$$

por otro lado, por la continuidad de S, y el hecho de que $\{x_n : n \geq 0\}$ es una pseudo-órbita asintótica, se tiene que, para $x \in X$ y $n \geq 0$,

$$d(x_{n+1}, S(x)) \leq d(x_{n+1}, S(x_n)) + d(S(x_n), S(x)) < \varepsilon,$$

por lo tanto g es continua.

Sea $\gamma^+(0, x_0) = \{(n, x_n) : n \geq 0\}$ la órbita positiva de $(0, x_0)$ para $g^n : Y \to Y$, $n \geq 0$. Entonces $\overline{\gamma^+(0, x_0)}$ está contenido en el compacto $\overline{\mathbb{Z}}_+ \times \overline{\{x_n\}}$, por lo que $\gamma^+(0, x_0)$ es precompacto en Y, y su conjunto $\omega-$límite, $\omega(0, x_0) = \{\infty\} \times \omega$, por la proposición 2.6, es invariante e ICT para g. Así, por la forma en que definimos g, ω es invariante e ICT para S. ■

El siguiente Teorema nos da una forma de encontrar conjuntos ICT a partir de conjuntos ICT conocidos.

Teorema 2.2. *Sean S, $S_n : X \to X$, $n \geq 1$ continuas. Sea $\{D_n\}$ una sucesión de subconjuntos compactos de X, no vacíos, con*

$$\lim_{n \to \infty} d_H(D_n, D) = 0,$$

para algún subconjunto compacto D de X. Supongamos que para cada $n \geq 1$, D_n es invariante e ICT para S_n. Si $S_n \to S$ uniformemente en $D \cup (\bigcup_{n \geq 1} D_n)$, entonces D es invariante e ICT para S.

Demostración. Sea $K = D \cup (\bigcup_{n \geq 1} D_n)$, entonces K es compacto por ser la unión finita de compactos. Además, una cubierta finita de K también es cubierta de D, y por lo tanto una subcubierta finita nos da una vecindad de D que también contiene D_n para n suficientemente grande.

Supongamos que $S_n \to S$ uniformemente en K, y que $\lim_{n \to \infty} d_H(D_n, D) = 0$. Sea $x \in D$, entonces existe $x_n \in D_n$, tal que $x_n \to x$. Para probar la invarianza de D en S, es decir $S(D) = D$, demostraremos la doble contención. Como $S_n(D_n) = D_n$, $n \geq 1$, tenemos que $S(x_n) \in D_n$, pero $S_n(x_n) \to S(x)$, por lo tanto $S(x) \in D$. Entonces $S(D) \subset D$. Por otro lado, existe $y_n \in D_n$ tal que $S_n(y_n) = x_n$. Podemos suponer que $y_{n_i} \to y \in D$ para alguna subsucesión y_{n_i}. Entonces $x_{n_i} = S_{n_i}(y_{n_i}) \to S(y) = x$, por lo que $D \subset S(D)$. Así, $S(D) = D$ es decir, D es invariante para S.

Ahora veamos que D es ICT para S. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $S|_K$ es uniformemente continua, y por la convergencia uniforme de S_n, existe un $\delta \in (0, \varepsilon/3)$ y un número natural N, tal que para $n \geq N$ y puntos $u, v \in K$ con $d(u, v) < \delta$, se cumple que

$$d(S_n(u), S(v)) \leq d(S_n(u), S(u)) + d(S(u), S(v)) < \varepsilon/3$$

Tomemos $n > N$ fija, tal que $d_H(D_n, D) < \delta$. Por tanto, para cualesquier par de puntos $a, b \in D$ existen puntos $x, y \in D_n$ tales que $d(x, a) < \delta$ y $d(y, b) < \delta$. Como D_n es ICT para S_n, existe una $\delta-$cadena $\{z_1 = x, z_2, ..., z_{m+1} = y\}$ en D_n que conecta a x con y. Dado que D_n está contenido en una $\delta-$vecindad de D, para cada $i = 2, ..., m$ podemos encontrar un $w_i \in D$ con $d(w_i, z_i) < \delta$. Tomando $w_1 = a$ y $w_{m+1} = b$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(S(w_i), w_{i+1}) &\leq d(S(w_i), S_n(z_i)) + d(S_n(z_i), z_{i+1}) + d(z_{i+1}, w_{i+1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \delta + \delta < \varepsilon \end{aligned}$$

para $i = 1, ..., m$. Por tanto, la sucesión $\{w_1 = a, w_2, ..., w_{m+1} = b\}$ es una $\varepsilon-$cadena en D, para S, conectando a con b, es decir, D es ICT para S. ■

Los únicos conjuntos ICT que hemos visto son conjuntos $\omega-$límite, esto no es coincidencia, pues bajo ciertas condiciones, los conjuntos $\omega-$límite son los únicos conjuntos ICT.

Proposición 2.8. *Sea $f : X \to X$ una función continua, y sea $M \subset X$ no vacío, compacto e ICT. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\varepsilon-$cadena finita en M, $\{y_1, ..., y_m\}$, con $y_1 = y_m$, tal que $\bigcup_{i=1}^m B(y_i, \varepsilon)$ es una cubierta de M.*

Demostración. Sea $x \in M$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como M es compacto, podemos encontrar una sucesión finita de puntos $\{x_1 = x, x_2, ..., x_m, x_{m+1} = x\}$ en M, tales que $\bigcup_{i=1}^m B(x_i, \varepsilon)$ es una cubierta para M.

Como M es ICT, para cada $1 \leq i \leq m$, existe una $\varepsilon-$cadena finita en M conectando x_i con x_{i+1}, digamos

$$\{y_1^i = x_i, y_2^i, ..., y_{n_i}^i, y_{n_i+1}^i = x_{i+1}\}.$$

Consideremos la sucesión

$$\{y_1^1, ..., y_{n_1}^1, y_1^2, ..., y_{n_2}^2, ..., y_1^m, ..., y_{n_m}^m, y_{n_m+1}^m\}.$$

Notemos que $y_1^{i+1} = x_{i+1} = y_{n_i+1}^i$. De aquí, $d(f(y_{n_i}^i), y_1^{i+1}) = d(f(y_{n_i}^i), y_{n_i+1}^i) < \varepsilon$. Además, $y_{n_m+1}^m = x_{m+1} = x$. Así, $\{y_1^1, ..., y_{n_1}^1, y_1^2, ..., y_{n_2}^2, ..., y_1^m, ..., y_{n_m}^m, y_{n_m+1}^m\}$. Notemos también, que todos los puntos de $\{x_1 = x, x_2, ..., x_m, x_{m+1} = x\}$ aparecen en la $\varepsilon-$cadena $\{y_1^1, ..., y_{n_1}^1, y_1^2, ..., y_{n_2}^2, ..., y_1^m, ..., y_{n_m}^m, y_{n_m+1}^m\}$, pero $\bigcup_{i=1}^m B(x_i, \varepsilon)$ ya era una cubierta de M. Por lo tanto, las bolas de radio ε con centro en los puntos de $\{y_1^1, ..., y_{n_1}^1, y_1^2, ..., y_{n_2}^2, ..., y_1^m, ..., y_{n_m}^m, y_{n_m+1}^m\}$, forman una cubierta de M. ■

Finalmente, enunciamos el resultado más importante de esta sección, con el cual caracterizamos los conjuntos ICT de la siguiente manera.

Teorema 2.3. *Un conjunto $M \subset X$, no vacío, compacto e invariante es ICT si y sólo si M es el conjunto $\omega-$límite de alguna pseudo-órbita asintótica de f en M.*

Demostración. Sea M el conjunto $\omega-$límite de alguna pseudo-órbita asintótica de f en M, por la proposición 2.7, la suficiencia se cumple.

Ahora, supongamos que M es no vacío, compacto, invariante e ICT. Para cada entero positivo k, y $\varepsilon = 1/k$, por la proposición 2.8, existe una $1/k-$cadena finita en M $\{z_1^k = x, z_2^k, ..., z_{l_k}^k, z_{l_k+1}^k = x\}$ conectando x con x, tal que las bolas de radio $1/k$ con centro en los puntos de $\{z_1^k = x, z_2^k, ..., z_{l_k}^k, z_{l_k+1}^k = x\}$ es una cubierta de M.

Consideremos la sucesión infinita

$$\{z_1^1, ..., z_{l_1}^1, z_1^2, ..., z_{l_2}^2, ..., z_1^k, ..., z_{l_k}^k, ...\}.$$

Notemos que $d(f(z_{l_k}^k), z_1^{k+1}) = d(f(z_{l_k}^k), z_{l_k+1}^k) = d(f(z_{l_k}^k), x) < 1/k$. Por lo tanto, $\{z_1^1, ..., z_{l_1}^1, z_1^2, ..., z_{l_2}^2, ..., z_1^k, ..., z_{l_k}^k, ...\}$ es una pseudo-órbita asintótica de f en M y su conjunto $\omega-$límite es M. ■

Como mencionamos antes, lo que se busca en los sistemas dinámicos es entender el comportamiento eventual de un proceso iterativo, y esto se logra fijándonos en los conjuntos $\omega-$límite. En general, no es tarea sencilla encontrar conjuntos $\omega-$límite, de aquí la relevancia del Teorema 2.3, pues ahora sabemos que si encontramos un conjunto $\omega-$límite, encontramos un conjunto ICT, y si encontramos un conjunto ICT, sabemos que podremos asociarlo al conjunto $\omega-$límite de alguna pseudo-órbita asintótica.

Bibliografía

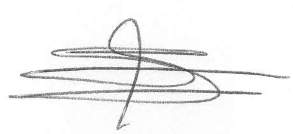
[1] Devaney R. L., (1987), *An introduction to chaotic dynamical systems*, second ed. Addison–Wesley, Reading, Mass.

[2] Hale, J. K., (1978), *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Math. Surv. Monogr. 25, Am. Math. Soc, Providence, RI.

[3] Hirsch, M. W., Smith, H. L., y Zhao, XQ, (2001), *Chain Transitivity, Attractivity, and Strong Repellors for Semidynamical Systems.* J. Dynam. Diff. Eq. 13, 107-131.

[4] King, J. E., y Méndez, H., *Sistemas dinámicos discretos.* Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2014.

[5] LaSalle, J. P., (1976), *The Stability of Dynamical Systems.* Soc. Industr. Appl. Math., Philadelphia.



Sergio Misael Vargas Montoya