Teorema Espectral

Carlos Adrián Pérez Estrada

21 de Agosto del 2018

Resumen

En este reporte mencionamos dos de las tres versiones del teorema espectral para operadores acotados y autoadjuntos, que actuan en un espacio de Hilbert separable.

1. Introducción

Uno de los resultados básicos del Álgebra lineal es el que establece que toda matriz autoadjunta $A \in M_{nxn}(\mathbb{C})$ es diagonalizable mediante una matriz unitaria U y tiene puros valores propios reales. Esto quiere decir que si A es una matriz autodjunta de coeficientes complejos, existen dos matrices $U \in M_{nxn}(\mathbb{C}), D \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ con D siendo diagonal y U cumpliendo la relación $U^*U = UU^* = I$; tales que $D = U^*AU$. Los valores propios de A constituyen los elementos de la diagonal de la matriz D, repetidos deacuerdo a su multiplicidad, y existe una base de $\mathbb{C}^n$ formada por vectores propios de A y otra base formada por los vectores propios de D. En efecto, podemos decir que la matriz D es una representación amigable de A en otra base de $\mathbb{C}^n$.

En terminos de transformaciones lineales, lo anterior es equivalente a decir que un operador autoadjunto $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ se convierte en un operador de mutliplicación (D) al cambiar de base. Más aún, tenemos que si $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es un operador autoadjunto, entonces existen un operador unitario $U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ y n números reales $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tales que

$$(UAU^{-1}f)_i = \lambda_i f_i,$$

para cada $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \in \mathbb{C}^n$.

Esto se puede generalizar a cualquier $\mathbb{C}$-espacio vectorial V de dimensión n. Si $A : V \to V$ es un operador autoadjunto, entonces existen un operador unitario $U : V \to \mathbb{C}^n$ y n números reales $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tales que

$$(UAU^{-1}f)_i = \lambda_i f_i,$$

para cada $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \in \mathbb{C}^n$.

La generalización de lo anterior a $\mathbb{C}-$espacios vectoriales de dimensión infinita es posible, de ello trata el teorema espectral que demostraremos en este reporte. Dicho teorema tiene tres versiones que, en cierta manera, son equivalentes y cuyas primeras dos versiones son las que trabajaremos para el caso de operadores autoadjuntos y acotados actuando en un espacio de Hilbert separable.

He de mencionar que este reporte es fruto de la estancia de Verano que realicé en la ciudad de Cuernavaca. Por parte de un servidor, se agradece apoyo económico para el desarrollo del presente proyecto al:

Proyecto FORDECYT 265667 "Programa para un avance global e integrado de la Matemática Mexicana".

2. Teorema Espectral: Forma del Cálculo Funcional Boreliano

La primera versión del teorema espectral establece que si H es un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ es un operador autoadjunto, entonces hay un $*-$homomorfismo entre las C^*-álgebras $B^d(\sigma(T))$ y $L(H)$ que cumple unas determinadas propiedades. Para demostrar eso, primero definiremos tal función en el conjunto de los polinomios sobre $C(\sigma(T))$, el cual denotaremos como $\mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$, y mostraremos algunas propiedades que luego, en virtud del teorema de Stone-Weierstrass, se extenderán a todo $C(\sigma(T))$. Posteriormente discutiremos la extensión de todo lo anterior al conjunto de funciones borealianas y acotadas sobre el espectro de T; dicho conjunto será denotado como $B_b(\sigma(T))$.

Definición 1 *Sea H un espacio de Hilbert separable. Para cada $T \in L(H)$ definimos la función*

$$\phi_T : \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x] \to L(H).$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n A^n$$

En virtud de nuestra definición, para cada $\phi_T : \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ definiremos $P(T) := \phi_T(P)$

Lema 2 *ϕ_T es un $*-$homomorfismo.*

Demostración.
Sean $P, Q \in \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ arbitrarios.

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n,\ Q(x) = \sum_{n=0}^{M} b_n x^n.$$

Sin perder generalidad supongamos que $N \geq M$ y definamos $b_n = 0\ \forall n \in \{m+1, \cdots, N\}$.

1.
$$\begin{aligned}
\phi_T(P+Q) &= \phi_T\big(\sum_{n=0}^{N}(a_n+b_n)x^n\big) \\
&= \sum_{n=0}^{N}(a_n+b_n)T^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} a_n T_n + \sum_{n=0}^{N} b_n T^n \\
&= \phi_T(P) + \phi_T(Q)
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\phi_T(PQ) &= \phi_T\big(\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \ \sum_{m=0}^{N} b_m x^m\big) \\
&= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_n b_m x^{n+m} \\
&= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_n b_m T^{n+m} \\
&= \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \ \circ \sum_{m=0}^{N} b_m x^m \\
&= \phi_T(P) \circ \phi_T(Q)
\end{aligned}$$

3.
$$\phi_T(1) = T^0 = I$$

4.

$$
\begin{aligned}
\phi_T(\alpha P) &= \phi_T(\alpha \sum_{n=0}^{N} a_n x^n) \\
&= \phi_T(\sum_{n=0}^{N} \alpha a_n x^n) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \alpha a_n T^n \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{N} a_n T^n \\
&= \alpha \phi_T(P)
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
\phi_T(\overline{P}) &= \phi_T(\sum_{n=0}^{N} \overline{a_n} \overline{x^n}) \\
&= \phi_T(\sum_{n=0}^{N} \overline{a_n} x^n) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n} T^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n} (T^n)^* \\
&= \sum_{n=0}^{N} (a_n T^n)^* \\
&= (\sum_{n=0}^{N} a_n T^n)^* \\
&= \phi_T(P)^*
\end{aligned}
$$

Las igualdades del último punto están justificadas por el hecho de que T es autoadjunto y, por lo mismo, $x \in \sigma(T) \subset \mathbb{R}$

■

Como $\mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ es un álgebra conmutativa, su imagen directa via la función ϕ_T también lo será. Eso nos da pauta para poder demostrar el siguiente lema:

Lema 3 *(Teorema del mapeo espectral para polinomios)*
Si $P \in \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$, entonces

$$\sigma(P(T)) = \{P(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$$

Demostración.
Sea $\lambda \in \sigma(T)$. Como λ es una raíz del polinomio $P(x) - P(\lambda)$, existe un polinomio $Q \in \mathbb{C}[x]$ para el cual $P(x) - P(\lambda) = (x - \lambda)Q(x)$.

Entonces, como ϕ_T es un $*-$homomorfismo, tenemos que

$$P(T) - P(\lambda) = \phi_T(P(x) - P(\lambda)) = \phi_T((x - \lambda)Q(x)) = \phi_T(x - \lambda) \circ \phi(Q(x)) = (T - \lambda)Q(T).$$

Si $P(T) - P(\lambda)$ fuese invertible, de manera que existiese un $R \in \mathbb{C}[x]$ para el cual $(P(T) - P(\lambda))R(T) = I = R(x)(P(T) - P(\lambda))$, tendriamos que $I = (T - \lambda)Q(T)R(T) = Q(T)R(T)(T - \lambda)$ implicandose que $T - \lambda$ es invertible, lo cual no es cierto. Por tanto, $P(T) - P(\lambda)$ no es invertible por lo que $P(\lambda) \in \sigma(P(T))$

Reciprocamente, seleccionemos un $\mu \in \sigma(P(T))$ arbitrario. Por el teorema fundamental del álgebra tenemos que existen n números complejos $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ para los cuales

$$P(x) - \mu = a(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$$

para cierto $a \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Esto implica que $P(T) - \mu = a(T - \lambda_1)(T - \lambda_2) \cdots (T - \lambda_n)$. Si para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ $T - \lambda_i$ fuese invertible, entonces $P(T) - \mu$ sería invertible con inversa

$$(P(T) - \mu)^{-1} = a^{-1}(T - \lambda_1)^{-1}(T - \lambda_2)^{-1} \cdots (T - \lambda_n)^{-1}.$$

Esto permite concluir que existe un $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ para el cual $T - \lambda_1$ no es invertible por lo que $\lambda_i \in \sigma(T)$ y $\mu = P(\lambda_i) \in \sigma\{P(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$

■

Lema 4 *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador autoadjunto. Se tiene que*

$$||P(T)|| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda))|$$

Demostración. Notemos que T^*T es un operador autoadjunto ya que $(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$ por lo que $||T^*T|| = \sup\{\ \lambda : \lambda \in \sigma(T^*T)\}$

Entonces

$$||P(T)||^2 = ||P(T)^*P(T)|| = ||\phi_T(\overline{P}P)|| = sup\{\ \lambda : \lambda \in \sigma(\phi_T(\overline{P}P))\} = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\overline{P}P(\lambda)| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)|^2$$

Implicandose que

$$||P(T)||^2 = \left(\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)| \right)^2$$

$$||P(T)| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)|$$

■

Lema 5 *Sean H un espacio de Hilbert y $A, B \in L(H)$ arbitrarios. Si $x \in H$ es un vector propio de A y B asociado a los respectivos valores propios λ_1 y λ_2, entonces x es un vector propio de $A + B$ y $A \circ B$ asociado a los valores propios $\lambda_1 + \lambda_2$ y $\lambda_1\lambda_2$, respectivamente.*
Demostración.
Por hipótesis, $Ax = \lambda_1 x$ y $Bx = \lambda_2 x$ por lo que

$$(A + B)x = Ax + Bx = \lambda_1 x + \lambda_2 x = (\lambda_1 + \lambda_2)x$$

$$A \circ B(x) = A\big(B(x)\big) = A(\lambda_2 x) = \lambda_2 A(x) = \lambda_2(\lambda_1 x) = (\lambda_1\lambda_2)x$$

■

Lema 6 *Sean $P \in \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ y $x \in H$. Si existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T(x) = \lambda x$, entonces $P(T)x = P(\lambda)x$*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\phi_T(P)x &= \left(\sum_{n=0}^{N} a_n T^n\right)x \\
&= \sum_{n=0}^{N} a_n T^n x \\
&= \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n x \\
&= \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n\right)x \\
&= P(\lambda)x
\end{aligned}
$$

■

Teorema 7 *(Cálculo Funcional Continuo)*

Sea H un espacio de Hilbert separable y $T \in L(H)$ un operador autoadjunto. Existe una única apicación $\phi : C(\sigma(T)) \to L(H)$ con las siguientes propiedades

1. *ϕ_T es un *-homomorfismo*
2. *$||\phi_T(f)||_{L(H)} = ||f||_\infty \ \forall f \in C(\sigma(T))$*
3. *Si f es la función identidad, entonces $\phi_T(f) = f(T) = T$*
4. *Si $Ax = \lambda x, \phi_T(f)x = f(\lambda)x$*
5. *$\sigma(\phi_T(f)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$*
6. *$\phi_T(f)$ es un operador normal $\forall f \in C(\sigma(T))$ y es autoadjunto si f solo toma valores reales.*
7. *Si $f \geq 0$, $\phi_T(f) \geq 0$*

Demostración.

Consideremos la función $\phi_T : \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x] \to L(H)$ definida con anterioridad. Por el lema 4 tenemos que dicha función es continua y de norma 1 por lo que el teorema del operador acotado implica que ϕ_T puede extenderse de manera única a la compleción de $\mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ como un operador de norma 1. Como $\mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ es un álgebra como subespacio vectorial de $C(\sigma(T))$ que separa puntos, contiene a las funciones constantes y es cerrado bajo complejos conjugados (debido a que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ por ser T autoadjunto); el teorema de Stone-Weierstrass asegura que su compleción de es todo $C(\sigma(T))$ ya que $\sigma(T)$ es compacto.

Entonces tenemos que el operador $\phi_T : \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x] \to L(H)$ se extiende de manera única a un operador $\phi_T : C(\sigma(T)) \to L(H)$ de norma 1 que, por lo mismo, será continuo y unitario. Las otras propiedades de $*-$homormofismo son faciles de probar aplando al hecho de que es $\mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ es denso en $C(\sigma(T))$.

Consideremos cualesquiera dos elementos $f, g \in C(\sigma(T))$. Por todo lo comentado en los parrafos anteriores, afirmamos la existencia de dos sucesiones $\{p_n\}, \{q_n\} \subset \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ para las cuales $p_n \to f$ y $q_n \to g$. Esto implica que $p_n q_n \to fg$ y al ser ϕ_T continua, $\phi_T(p_n q_n) \to \phi_T(fg)$, $\phi_T(p_n) \to \phi_T(f)$ y $\phi_T(q_n) \to \phi_T(g)$ conllevando a que $\phi_T(p_n) \circ \phi_T(q_n) \to \phi_T(f) \circ \phi_T(g)$. Recordemos que ϕ_T restringida a $\mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ es un $*-$homomorfismo; por consiguiente, $\phi_T(p_n) \circ \phi_T(q_n) = \phi_T(p_n q_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$ concluyendose así que $\phi(fg)$ y $\phi(f) \circ \phi(g)$ son límites de la misma sucesión y, por consecuencia, iguales.

Solo queda probar que $\phi_T(\overline{f}) = \phi_T(f)^*$. Tenemos que las asignaciones $x \in \mathbb{C} \mapsto \overline{x} \in \mathbb{C}$ y $T \in L(H) \mapsto T^* \in L(H)$ son continuas por lo cual

$$\phi_T(f)^* \leftarrow \phi_T(p_n)^* = \phi_T(\overline{p_n}) \to \phi_T(\overline{f})$$

Ahora, para probar el punto número 4 hay que recalcar 2 cuestiones: Primero, si una sucesión de operadores $\{A_n\} \subset L(H)$ converge a un operador A, entonces la sucesión $\{A_n(x)\} \subset H$ converge a Ax $\forall H$. Observemos que si $A_n \to A$, entonces $\forall \epsilon > 0$ y $x \in H - \{0\}$ existe un $N \in \mathbb{N}$ para el cual $||A - A_n||_{L(H)} < \frac{\epsilon}{||x||}$ si $n \geq N$

Esto implica que

$$||Ax - A_n x||_H \leq ||A - A_n||_{L(H)} ||x||_H < \frac{\epsilon}{||x||_H} ||x||_H = \epsilon$$

En segundo lugar, la convergencia en $C(\sigma(T))$ es equivalente a la convergencia uniforme de funciones por lo que ciertamente si una sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \sigma(T)$ converge a una función f, entonces $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$ $\forall x \in C(\sigma(T))$ y la demostración de ello es análoga a la anterior.

Por tanto, si existen $x \in H$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $Ax = \lambda x$, entonces

$$\phi_T(f)x \leftarrow \phi_T(p_n)x = p(\lambda)x \to f(\lambda)x.$$

Para mostrar el apartado 5 haremos uso del criterio de Weyl, el cual dice que para todo operador autoadjunto $T \in L(H)$ se tiene que $\lambda \in \sigma(T)$ si y solo si existe un sucesión de vectores unitarios $\{x_n\} \subset H$ para la cual $||(T - \lambda)x_n|| \to 0$.

Sean $f \in C(\sigma(T))$ y $\mu \notin \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$ Lo anterior implica que la función $f - \mu : x \in C(\sigma(T)) \mapsto f(x) - \mu \in \mathbb{C}$ nunca es cero por lo que $g := (f - \mu)^{-1} \in C(\sigma(T))$. Como $g(f - \mu) = 1 = (f - \mu)g$, se llega a que

$$I = \phi_T(1) = \phi_T((f - \mu)g) = \phi_T(f - \mu) \circ \phi_T(g)$$
$$I = \phi_T(1) = \phi_T(g(f - \mu)) = \phi_T(g) \circ \phi_T(f - \mu)$$

Teniendose que $\phi_T(f - \mu) = \phi_T(f) - \mu I$ es un operador invertible y, por tanto, que $\mu \notin \sigma(\phi_T(f))$.

Inversamente, seleccionemos cualquier $\lambda \in \sigma(T)$ y una sucesión de polinomios $\{p_n\} \to f$ para la cual $||f - p_n||_\infty \leq \frac{1}{n}$. Entonces

$$|f(\lambda) - p_n(\lambda)| \leq \frac{1}{n} \text{ y } ||\phi_T(f) - \phi_T(p_n)|| \leq \frac{1}{n}.$$

Por el lema 3 sabemos que $p_n(\lambda) \in \sigma(\phi_T(p))$ por lo que apelamos al crtierio de Weyl para asegurar la existencia de una sucesión de vectores unitarios $x \in H$ para los cuales $||(\phi_T(p_n) - p_n(\lambda))x_n|| \leq \frac{1}{n}$. Todo esto conlleva a que

$$||(\phi_T(f) - f(\lambda))x_n|| \leq ||(\phi_T(f) - \phi_T(p_n))x_n|| + ||(\phi_T(p_n) - p_n(\lambda))x_n|| + ||(p_n(\lambda) - f(\lambda))x_n|| \leq \frac{3}{n}$$

Como $\frac{3}{n} \to 0$ cuando $n \to +\infty$, $||(\phi_T(f) - f(\lambda))x_n|| \to 0$ por lo que el criterio de Weyl implica que $f(\lambda) \in \sigma(\phi_T(f))$

Solo faltan probar los incisos 6 y 7. El 7 es consecuencia directa del 6 y este, a su vez, es consecuencia del 1. Observemos que $\forall f \in C(\sigma(T))$ $\phi_T(f) \circ \phi_T(f)^* = \phi_T(f\overline{f}) = \phi_T(\overline{f}f) = \phi_T(f)^* \circ \phi_T(f)$

y si f solo toma valores reales, entonces $\phi_T(f)^* = \phi_T(\overline{f}) = \phi_T(f)$.

Finalmente, notemos que si $f \geq 0$, entonces $g := \sqrt{f} \in C(\sigma(T)$ y solo toma valores reales por lo cual $\forall x \in H$

$$\langle x, \phi_T(f)x\rangle = \langle x, \phi_T(gg)x\rangle = \langle x, \phi_T(g)\phi_T(g)\rangle = \langle \phi_T(g)^* x, \phi_T(g)x\rangle = \langle \phi_T(g)x, \phi_T(g)x\rangle \geq 0$$

implicandose que $\phi_T(f) \geq 0$

■

Asi como en el caso del operador $\phi_T : \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x] \to L(H)$, $\forall f \in C(\sigma(T))$ denotaremos a $\phi_T(f)$ como $f(T)$ y diremos que ϕ_T es el cálculo funcional continuo del operador T.

Ahora nuestro interes es el de construir ciertas medidas utilizando la función definida en el teorema anterior, para luego construir unas integrales que nos permitan extender la definición de ϕ_T para funciones borelianas y acotadas sobre $\sigma(T)$.

Para ello, consideremos un espacio de Hilbert H y $T \in L(H)$ un operador autoadjunto. Para cualesquiera $x, y \in H$ definimos la función

$$\begin{aligned} \omega_{x,y} : \quad & C(\sigma(T)) \to \mathbb{C} \\ & f \mapsto \langle x, f(T)y\rangle \end{aligned}$$

Por las propiedades del teorema anterior, ω es una transformación lineal y por la desigualdad de Schwartz tenemos que $\forall f \in C(\sigma(T))$

$$|\omega_{x,y}(f)| = |\langle x, f(T)y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||f(T)y|| \leq ||x|| \cdot ||f(T)|| \cdot ||y|| \leq ||x|| \cdot ||f|| \cdot ||y|| = ||x|| \cdot ||y|| \cdot ||f||$$

por lo que $\omega_{x,y} \in C(\sigma(T))^*$ $\forall x, y \in H$. En virtud del teorema de Riesz-Markov, afirmamos la existencia de una única medida compleja de Baire $\mu_{x,y}$ definida sobre el conjunto compacto $\sigma(T)$ para la cual

$$\langle x, f(T)y\rangle = \omega_{x,y}(f) = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y}$$

Definición 8 *Para cada $x, y \in H$ las medidas anteriores, $\mu_{x,y}$, son denominadas medidas espectrales.*

Lema 9 *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ autoadjunto. Para cada $x, y, z \in H$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tenemos que las medidas espectrales cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\mu_{x,\lambda_1 y+\lambda_2 z} = \lambda_1\mu_{x,y} + \lambda_2\mu_{x,z}$
2. $\mu_{\lambda_1 x+\lambda_2 y,z} = \overline{\lambda_1}\mu_{x,z} + \overline{\lambda_2}\mu_{y,z}$
3. $\mu_{x,y} = \overline{\mu_{y,x}}$

Demostración.

Sea $f \in C(\sigma(T))$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,\lambda_1 y+\lambda_2 z} = \quad & \langle x, f(T)(\lambda_1 y+\lambda_2 z)\rangle \\ & \lambda_1\langle x, f(T)y\rangle + \lambda_2\langle x, f(T)z\rangle \\ & \lambda_1 \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} + \lambda_2 \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,z} \\ & \int_{\sigma(T)} f(\lambda_1 d\mu_{x,y} + \lambda_2 d\mu_{x,z})\end{aligned}$$

La última igualdad está justificada por el hecho de que combinaciones lineales de medidas de Baire resultan en medidas de Baire. Por tanto, como el teorema de Riesz-Markov asegura que la medida que representa al funcional $\omega_{x,y}$ es única, tenemos que $\mu_{x,\lambda_1 y+\lambda_2 z} = \lambda_1\mu_{x,y} + \lambda_2\mu_{x,z}$

Similarmente, para probar el punto 2, notemos que

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(T)} f d\mu_{\lambda_1 x+\lambda_2 y,z} = \quad & \langle \lambda_1 x + \lambda_2 y, f(T)(z)\rangle \\ & \overline{\lambda_1}\langle x, f(T)z\rangle + \overline{\lambda_2}\langle y, f(T)z\rangle \\ & \overline{\lambda_1} \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,z} + \overline{\lambda_2} \int_{\sigma(T)} f d\mu_{y,z} \\ & \int_{\sigma(T)} f(\overline{\lambda_1} d\mu_{x,z} + \overline{\lambda_2} d\mu_{y,z})\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $\mu_{\lambda_1 x+\lambda_2 y,z} = \overline{\lambda_1}\mu_{x,z} + \overline{\lambda_2}\mu_{y,z}$

Finalmente, para el punto 3 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} \quad &= \langle x, f(T)y\rangle \\ &= \langle (f(T))^* x, y\rangle \\ &= \langle \overline{f}(T)x, y\rangle \\ &= \overline{\langle y, \overline{f}(T)x\rangle} \\ &= \overline{\int_{\sigma(T)} \overline{f}\mu_{y,x}} \\ &= \int_{\sigma(T)} f\ \overline{\mu_{y,x}}\end{aligned}$$

Demostrandose así que $\mu_{x,y} = \overline{\mu_{y,x}}$

■

El teorema anterior y la desigualdad de Schwartz implican que para cada $f \in B_b(\sigma(T)$ la asignación

$$\begin{aligned}\alpha_f : \quad & H\times H \to \mathbb{C} \\ & (x,y) \mapsto \int_{\sigma(T)} f\mu_{x,y}\end{aligned}$$

define una forma sesquilinear en H por lo que el lema de representación de Riesz para formas sesquilineares implica que existe un único $A \in L(H)$ para el cual

$$\langle x, Ay\rangle = \alpha_f(x,y) = \int_{\sigma(T)} f\mu_{x,y},\ \forall x, y \in H.$$

Ese operador A será definido como $f(T)$ y servirá para conseguir la tan ansiada extensión del cálculo funcional del conjunto de funciones continuas $C(\sigma(T))$ al conjunto de funciones borelianas y acotadas $B_b(\sigma(T))$.

Definición 10 *Sea H un espacio de Hilbert. Para cada $T \in L(H)$ autoadjunto definimos la función*

$$\begin{aligned} \phi_T : B_b(\sigma(T)) &\to L(H). \\ f &\mapsto f(T) \end{aligned}$$

No es dificil ver que si $f \in C(\sigma(T))$, la definición anterior coincide con la del teorema del Cálculo Funcional Continuo.

Lema 11 *Sean $x, y \in H$ arbitrarios.*

1. *Si $f \in B_b(\sigma(T))$ y $g \in C(\sigma(T))$, entonces $\int_{\sigma(T)} fg\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} f\mu_{x,g(T)y}$*
2. *Si $f, g \in B_b(\sigma(T))$, entonces $\int_{\sigma(T)} fg\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} g\mu_{(f(T))^*x,y}$*

Demostración.

1. Primero supongamos que f es continua. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(T)} fgd\mu_{x,y} &= \langle x, \phi_T(fg)y\rangle \\ &= \langle x, (\phi_T(f) \circ \phi_T(g))y\rangle \\ &= \langle x, \phi_T(f)(\phi_T(g)y)\rangle \\ &= \int_{\sigma(T)} f\ \mu_{x,g(T)y} \end{aligned}$$

   Ahora extenderemos lo anterior para el caso en donde $f \in B_b(\sigma(T))$. Para ello consideremos el conjunto

$$U_g = \left\{ f \in B_b(\sigma(T)) : \int_{\sigma(T)} fg\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} f\mu_{x,g(T)y} \right\}$$

   Por lo anterior vemos que $C(\sigma(T)) \subset U_g$. Consideremos una sucesión $\{f_n\} \subset U_g$ uniformemente acotada convergente a una función f de manera puntual.

   Como estamos trabajando con medidas de Baire, el teorema de la convergencia dominada implica que

$$\int_{\sigma(T)} fg\mu_{x,y} \leftarrow \int_{\sigma(T)} f_n g\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} f_n\mu_{x,g(T)y} \to \int_{\sigma(T)} f\mu_{x,g(T)y}$$

   ya que $\mu_{x,y}(\sigma(T)) < +\infty\ \forall x, y \in H$; por lo que $f \in U_g$ teniendose así que $U_g = B_b(\sigma(T))$

2. De nuevo, primero supondremos que g es continua. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(T)} fgd\mu_{x,y} &= \int_{\sigma(T)} f\ \mu_{x,g(T)y} \\ &= \langle x, \phi_T(f)(\phi_T(g)y)\rangle \\ &= \langle x, (\phi_T(f) \circ \phi_T(g))y\rangle \\ &= \langle (\phi_T(f))^*x, \phi_T(g))y\rangle \\ &= \int_{\sigma(T)} g\mu_{(f(T))^*x,y} \end{aligned}$$

Con un argumento análogo al anterior se demuestra que lo anterior es valido $\forall f \in B_b(\sigma(T))$.

$\blacksquare$

Ya estamos listos para enunciar y demostrar la primera forma del teorema espectral:

Teorema 12 *(Teorema espectral: forma del Cálculo Funcional Boreliano)*
Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador autoadjunto. Existe una única aplicación $\phi : B_b(\sigma(T)) \to L(H)$ que extiende el cálculo funcional continuo de T y que cumple las siguientes propiedades:

1. *ϕ es un *-homomorfismo*
2. $||\phi(f)||_{L(H)} \leq ||f||_\infty \; \forall f \in B(\sigma(T))$
3. *si f es la función identidad, $\phi(f) = T$*
4. *Si $f_n \to f$ puntualmente y $\{f_n\}$ es uniformemente acotada, entonces $\phi(f_n) \to \phi(f)$ puntualmente.*
5. *si $Ax = \lambda x, \phi(f)x = f(\lambda)x$*
6. *si $f \geq 0$, $\phi(f) \geq 0$*
7. *si $BT = TB, \phi_T(f)B = B\phi_T(f)$*

Demostración. Primero, mostraremos que la aplicación $\phi_T : B_b(\sigma(T)) \to L(H)$ definida con anterioridad cumple todas las hipótesis del teorema:

Consideremos dos funciones $f, g \in B_b(\sigma(T))$

1. $\forall x, y \in H$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\langle x, f(T)y + g(T)y\rangle = \langle x, f(T)y\rangle + \langle x, g(T)y\rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} + \int_{\sigma(T)} g d\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} (f+g) d\mu_{x,y} = \langle x, (f+g)(T)y\rangle$$

$$\langle x, \alpha f(T)y\rangle = \alpha \langle x, f(T)y\rangle\rangle = \alpha \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} \alpha f d\mu_{x,y} = \langle x, (\alpha f)(T)y\rangle$$

teniendose que ϕ_T es un operador lineal que, por ser una extensión del operador definido para funciones continuas, será unitario.

Por otra parte,

$$\langle x, \phi_T(f)^* y\rangle = \langle \phi_T(f)x, y\rangle = \overline{\langle y, \phi_T(f)x\rangle} = \overline{\int_{\sigma(T)} f d\mu_{y,x}} = \int_{\sigma(T)} \overline{f} d\mu_{x,y} = \langle x, \phi_T(\overline{f})y\rangle$$

$$\langle x, \phi_T(fg)y\rangle = \int_{\sigma(T)} fg d\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} g d\mu_{\phi_T(f)^* x, y} = \langle \phi_T(f)^* x, \phi_T(g)y\rangle = \langle x, \phi_T(f) \circ \phi_T(g)y\rangle$$

concluyendose que ϕ_T es un $*-$homomorfismo.

2. Es consecuencia del punto anterior ya que todo $*-$homomorfismo entre C^*-álgebras es continuo.

3. Es inmediato del hecho de que esta función extiende el cálculo funcional continuo previamente definido.

4. Por hipótesis, $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n|||_\infty < +\infty$ y $f_n(x) \to f(x)$ por lo que $\forall x \in H$

$$|f(x)| \leq M$$

teniendose que $||f||_\infty \leq M$.

Esto implica que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|f_n - f|^2 = |f_n + (-f)|^2 \leq |f_n|^2 + |f|^2 \leq 2M^2 < +\infty.$$

Para ara cualquier $x \in H$ consideremos su medida espectral asociada $\mu_{x,x}$. Como dicha medida es de Baire y $\sigma(T)$ es compacto, tenemos que

$$\int_{\sigma(T)} 2M^2 d\mu_{x,x} < \infty$$

de modo que la sucesión de funciones $\{|f_n - f|^2\}$ está "dominada"por la función constante $2M^2 \in L^1(\sigma(T), d\mu_{x,x})$. Entonces el teorema de la convergencia dominada implica que

$$\int_{\sigma(T)} |f_n - f|^2 d\mu_{x,x} \to 0$$

ya que $|f_n - f|^2 \to 0$ puntualmente.

Entonces, para cada $x \in H$ llegamos a que

$$\begin{aligned}
||f_n(T)x - f(T)x|| &= \langle f_n(T)x - f(T)x, f_n(T)x - f(T)x\rangle \\
&= \langle (f_n - f)(T)x, (f_n - f)(T)x\rangle \\
&= \langle x, (f_n - f)(T)^* \circ (f_n - f)(T)x\rangle \\
&= \langle x, (\overline{f_n - f})(T) \circ (f_n - f)(T)x\rangle \\
&= \langle x, (|f_n - f|^2)(T)x\rangle \\
&= \int_{\sigma(T)} |f_n - f|^2 d\mu_{x,x} \to 0
\end{aligned}$$

Obteniendo la conclusión deseada

5. Definamos el conjunto

$$U := \{f \in B_b(\sigma(T)) : \phi_T(f)x = f(\lambda)x\}$$

Por el teorema del cálculo funcional continuo, $C(\sigma(T)) \subset U$.

Entonces consideremos una sucesión $\{f_n\} \subset U_g$ uniformemente acotada convergente a una función f de manera puntual. En virtud del punto 4, podemos afirmar que $\phi_T(f_n) \to \phi_T(f)$ de manera puntual por lo que

$$\phi_T(f)(x) \leftarrow \phi_T(f_n)x = f_n(\lambda)x \to f(\lambda)x$$

conllevando a que $f \in U$ y, por tanto, a que $U = B_b(\sigma(T))$.

6. Este punto y el siguiente son análogos al anterior. Consideremos el conjunto

$$U = \{f \in B_b(\sigma(T)) : f \geq 0 \Rightarrow \phi_T(f) \geq 0\}$$

Por el teorema del cálculo funcional continuo tenemos que $C(\sigma(T)) \subset U$. Volvamos a considerar una sucesión $\{f_n\} \subset U_g$ uniformemente acotada convergente a una función f de manera puntual. Tenemos que $\forall x \in H$

$$< x, f(T)x >=< x, \lim_{n\to\infty} f_n(T)x >= \lim_{n\to\infty} < x, f_n(T)x >$$

ya que la función $< \cdot, \cdot >_H$ es continua. Por hipótesis, $< x, f_n(T)x > \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que $< x, f(T)x >= \lim_{n\to\infty} < x, f_n(T)x > \geq 0$. En consecuencia, $f \geq 0 \Rightarrow \phi_T \geq 0$ implicando que $U = B_b(\sigma(T))$.

7. Primero supongamos que f es un polinomio. Entonces

$$\begin{aligned} f(T) \circ B &= \left(\sum_{n=0}^{N} a_n T^n\right) \circ B \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N} a_n T^n \circ B\right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N} a_n B \circ T^n\right) \\ &= B \circ \left(\sum_{n=0}^{N} a_n T^n\right) \\ &= B \circ f(T). \end{aligned}$$

Luego, supongamos que f es una función continua. Esto implica la existencia de una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ convergente a f. Entonces $P_n(T) \to f(T)$ por lo que

$$f(T) \circ B \leftarrow p_n(T) \circ B = B \circ p_n(T) \to B \circ f(T).$$

Solo queda extender la proposición anterior para las funciones $f \in B_b(\sigma(T))$. Al igual que en los casos anteriores, lo haremos con la ayuda del conjunto

$$U := \{f \in B_b(\sigma(T)) : f(T) \circ B = B \circ F(T)\}$$

Considerando una sucesión $\{f_n\} \subset U_g$ uniformemente acotada convergente a una función f de manera puntual. En virtud del punto 4 tenemos que $f_n(T) \to f(T)$ puntualmente por lo que

$$B \circ f(T) \leftarrow B \circ f_n(T) = f_n(T) \circ B \to f(T) \circ B.$$

Obteniendo la conclusión deseada.

Ahora demostraremos que el operador ϕ_T es el único que cumple las propiedades pedidas por el teorema espectral. Para ello, supongamos que existe otro operador $\phi' : B_b(\sigma(T)) \to L(H)$ que cumple tales propiedades y definamos el conjunto

$$U := \{f \in B_b(\sigma(T)) : \phi_T(f) = \phi'(f)\}$$

Tanto ϕ_T como ϕ extienden el cálculo funcional continuo de T por lo que $C(\sigma(T)) \subset U$. Ahora, si consideramos una sucesión $\{f_n\} \subset U_g$ uniformemente acotada convergente a una función f de manera puntual; tendremos que $\phi_T(f_n) \to \phi_T(f)$ y $\phi'(f_n) \to \phi'(f)$ de manera puntual por lo que

$$\phi_T(f) \leftarrow \phi_T(f_n) = \phi'(f_n) \to \phi'(f)$$

conllevando a que $U = B_b(\sigma(T))$. De esto se concluye que $\phi_T = \phi'$.

Tenemos existencia y unicidad de un operador que extiende el cálculo funcional continuo de T al conjunto $B_b(\sigma(T))$. Tal extensión será denominada como el cálculo funcional boreliano de T.

■

3. Teorema Espectral: Forma de Multiplicación

Con la herramienta del Cálculo Funcional Boreliano ya estamos en condiciones de dar la generalización que comentamos en la introducción. Para ello necesitamos la definición de vector ciclico

Definición 13 *Sea H un espacio de Hilbert separable. Se dice que $x \in H$ es un vector ciclico de T si*

$$\overline{gen(\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty})} = H$$

De aqui en adelante denotaremos como $\mu_{x,x}$ a la medida asociada al par $(x,x) \in H \times H$ en el teorema de Riesz-Markov que utilizamos en la sección pasada.

Lema 14 *Sea H un espacio de Hilbert y sea $T \in L(H)$ un operador autoadjunto y acotado con un vector ciclico $x \in H$. Se tiene la existencia de un operador unitario $U : H \to L^2(\sigma(T), d\mu_{x,x})$ para el cual*

$$(UAU^{-1}f)\lambda = \lambda f(\lambda),\ \forall \lambda \in \sigma(T)$$

Desafortundamente, no todo operador $T \in L(H)$ tiene un vector ciclico; pero si H es un espacio de Hilbert separable, podemos descomponerlo en una suma de espacios en donde T tenga un vector ciclico en cada uno de ellos.

Lema 15 *Sea T un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert separable H. Se tiene la existencia de una descomposición de H*

$$H = \bigoplus_{n=1}^{N} H_n, N = 1, 2, \cdots, \infty$$

para la cual

1. *si $x \in H_n, T(x) \in H_n$*
2. *$\forall n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in H_n$ que es vector ciclico de $T|_{H_n}$. Esto implica que $H_n = \overline{\{f(T)x_n : f \in C(\sigma(T))\}}$*

Combinando estos 2 lemas ya podemos dar la forma del teorema espectral que comentabamos al inicio de este escrito.

Teorema 16 *(Teorema Espectral: forma de multiplicación)*
Sea T un operador acotado en un espacio de Hilbert separable H. Se tiene la existencia de unas medidas $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ $(N = 1, 2, \cdots, \infty)$ en $\sigma(A)$ y un operador unitario U

$$U : H \to \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\sigma(T), d\mu_n)$$

para el cual

$$(UAU^{-1} f_n)\lambda = \lambda f_n(\lambda),\ \forall \lambda \in C(\sigma(T))$$

Corolario 1 *Sea T un operador acotado en un espacio de Hilbert separable H. Se tiene la existencia de un espacio de medida finito (M, μ); una función $F : M \to \mathbb{R}$ acotada y un operador unitario $U : H \to L^2(M, \mu)$ para los cuales*

$$UAU^{-1} f = F f,\ \forall f \in L^2(M, \mu).$$

Esta última forma del teorema espectral es, a mi parecer, la menos abstracta de las tres y la que mejor pone en evidencia como la noción de diagonalizar una matriz autoadjunta $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ se puede generalizar a espacios vectoriales de dimensión infinita. Aqui solo comentamos dos de las tres formas del teorema espectral y solo nos restringimos al caso en donde el operador es acotado y el espacio de Hilbert es separable. El teorema se puede generalizar para los casos en donde el espacio de Hilbert no es separable o el operador no es acotado, incluso podemos dar una versión del teorema espectral para operadores normales. El lector interesado en ello puede consultar la bibliografia para más detalle.

Darse cuenta de que el teorema espectral generaliza la noción de matriz diagonal a espacios de Hilbert separables no es trivial. El teorema espectral habla de operadores unitarios cuyo contradominio es un espacio L^2 mientras que las matrices diagonales se definen en términos de operadores unitarios con contradominio en $\mathbb{C}^n$. Lo que faltaria por discernir es que $\mathbb{C}^n$ es isometricamente isomorfo a un espacio L^2.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto $M_n := \{1, 2, \cdots, n\}$ y definimos una función medida como

$$\mu : A \in \mathbb{P}(M_n) \mapsto |A| \in \mathbb{R}^*$$

En donde $\mathbb{P}$ denota al conjunto potencia de M_n.

No es dificil de observar que $(M_n, \mathbb{P}(M_n), \mu)$ es un espacio de medida. Ahora definiremos el operador

$$V : F \in L^2(M_n, d\mu) \mapsto (F(1), F(2), \ldots, F(n)) \in \mathbb{C}^n$$

V es un isomorfismo entre espacios vectoriales que preserva el producto interno ya que para cualesquiera $f, g \in L^2(M_n, d\mu)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle_{L^2(M_n,d\mu)} &= \textstyle\int_{M_n} f\overline{g} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \textstyle\int_{\{i\}} f\overline{g} \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(i)\overline{g(i)} \\ &= \langle V(f), V(g)\rangle_{\mathbb{C}^n} \end{aligned}$$

En la introducción comentamos que para cualquier espacio vectorial complejo H de dimensión n, teniamos que si $A : H \to H$ era un operador autoadjunto, entonces existian un operador unitario $U : H \to \mathbb{C}^n$ y n números reales $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tales que

$$(UAU^{-1}f)_i = \lambda_i f_i,$$

para cada $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \in \mathbb{C}^n$.

Usando el operador V anterior, definimos su inverso como T para poder concluir, en virtud del aserto del parrafo anterior, que si $A : H \to H$ es un operador autoadjunto, entonces el operador unitario $TU : H \to L^2(M_n, d\mu)$ cumple con la propiedad de que existen ciertos n números reales $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ para los cuales

$$(TUA(TU)^{-1}f)_i = \lambda_i f_i,$$

para cada $f \in L^2(M_n, d\mu)$.

Esto muestra que, en efecto, el resultado clásico de Álgebra lineal comentado en la introducción es un caso particular del teorema espectral.

Este trabajo fue realizado durante el Tercer Verano de Investigación en Matemáticas, en el Instituto de Matemáticas de la UNAM Unidad Cuernavaca bajo la supervisión del Dr. Carlos Villegas Blas por el alumno

Carlos Adrián

Carlos Adrián Pérez Estrada
Universidad Autónoma de Baja California

4. Referencias

1. Michael Reed & Barry Simon. METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS. Academic Press, inc, Estados Unidos, segunda edición, 1980.

2. William Arverson. A Short Course on Spectral Theory. Graduate Texts In Mathematics. Springer, New York, primera edición, 2002.