Teoría Espectral para Operadores de Dimensión Finita. Forma Canónica de Jordan.

Daniela Hernández Grijalva
Asesorada por
Dr. Carlos Villegas Blas

10 de agosto de 2018

Se agradece apoyo económico para el desarrollo del presente proyecto al: Proyecto FORDECYT 265667 "Programa para un avance global e integrado de la Matemática Mexicana".

1. Objetivo

Utilizar las herramientas de variable compleja aplicada a operadores, considerando espacios vectoriales de dimensión finita para poder deducir *la forma canónica de Jordan* a través de la teoría espectral.

2. Preliminares

2.1. Conceptos Básicos de Álgebra Lineal

Definición 2.1.1.
*Un espacio vectorial X es un conjunto no vacío de elementos llamados vectores, u, v, $\ldots$, con operaciones lineales (***suma*** $u+v$ de dos vectores u, v y* **multiplicación** *αu de un vector u por un escalar α) definidas en X que obedecen las reglas usuales de tales operaciones.*

Nota 1.
Asumiremos que los escalares son números complejos ($\alpha \in \mathbb{C}$), es decir, consideraremos el espacio vectorial complejo.

Definición 2.1.2.
Un subconjunto M de X es un subespacio vectorial de X si M es en si mismo un espacio vectorial bajo las mismas operaciones lineales definidas en X.

Definición 2.1.3.
Se dice que los vectores $u_1, \ldots, u_n$ son linealmente independientes si su combinación lineal $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ es igual a cero si y sólo si $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. En caso contrario se dice que los vectores son linealmente dependientes.

Definición 2.1.4.
La dimensión de X, denotada por $dim X$, es el mayor número de vectores linealmente independientes que existen en X.

Nota 2.
Si no existe un número finito de vectores linealmente independientes entonces $dim X = \infty$. En lo consiguiente consideraremos X espacio vectorial finito-dimensional ($0 \leq dim X < \infty$).

Nota 3.
Decimos que X es N-dimensional si y sólo si $u_1, \ldots, u_N$ son linealmente independientes.

Nota 4.
Si M es un subespacio vectorial, la dimensión de M no es necesariamente la de X.

Definición 2.1.5.
Sean S_1 y S_2 subconjuntos de X se define y denota $S_1 + S_2$ como el conjunto de todos los vectores de la forma $u_1 + u_2$ con $u_1 \in S_1$ y $u_2 \in S_2$. Similarmente se puede definir para k-subconjuntos de X.

Definición 2.1.6.
Sean $M_1, \ldots, M_S$ subespacios vectoriales de X.
Se dice que X es la suma directa de $M_1, \ldots, M_S$, si $X = M_1 + \cdots + M_S$ y $\sum u_j = 0$ ($u_j \in M_j$) implica que todos los $u_j = 0$. Entonces escribimos:

$$X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_S$$

Definición 2.1.7.
La delta de Kronecker δ_{ij} es una función de dos variables definida por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \ i = j \\ 0 & si \ i \neq j \end{cases}$$

Se nombra así por el matemático Leopold Kronecker.

Definición 2.1.8.
Sean X, Y dos espacios vectoriales. Una función que manda cada vector $u \in X$ en un vector v $(T(u)) \in Y$ se llama transformación lineal si preserva las relaciones lineales:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

para α y β escalares y u, $v \in X$.

Nota 5.
Por simplicidad en ocasiones en vez de escrbir $T(u)$ escribiremos solamente Tu.

Definición 2.1.9.
Sea X espacio vectorial. La tranformación **identidad** *$I : X \to X$ se define por*

$$I(x) = x, \quad para \ cada \ x \in X.$$

Nota 6.
Sea X es un espacio vectorial. Denotaremos el rango de un operador T mediante TX.

Nota 7.
Si $X = Y$ de la definición 2.1.8 se dice simplemente que T es un **operador** *lineal en X.*
El conjunto de todos los operadores lineales en X se denota por $\mathcal{B}(X)$.

Definición 2.1.10.
Un número complejo λ es llamado un eigenvalor (valor propio o valor característico) de T, si existe un vector no nulo $u \in X$ talque

$$T(u) = \lambda u,$$

u es llamado eigenvector (vector propio o vector característico) de T asociado a λ.

Definición 2.1.11.
El conjunto N_λ de todos los $u \in X$ tales que $T(u) = \lambda u$, es un subespacio de X y es llamado el eigen-espacio de T para el eigenvalor λ y la $dim N_\lambda$ es llamada la multiplicidad (geométrica) de λ.

Definición 2.1.12.
Un operador de proyección o simplemente una proyeccción P en un espacio vectorial X es una transformación lineal idempotente, es decir, satisface la igualdad $P^2 = P$.

Definición 2.1.13.
Un operador lineal $T \in \mathcal{B}(X)$ es llamado nilpotente (operador) si $T^n = 0$ para algún entero positivo n.

Definición 2.1.14.
Un subespacio vectorial M se dice invariante bajo un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ si $T(M) \subset M$. En este caso T induce un operador lineal T_M de M a M, definido por $T_M(u) = T(u)$ para $u \in M$.

Proposición 1.
Sea X un espacio vectorial y P una proyección. Entonces

$$X = PX \ \oplus \ (I - P)X$$

Demostración.
Sea $x \in X$. Observe lo siguiente:

$$x = Px + x - Px = Px + Ix - Px = Px + (I - P)x = w + y,$$

donde $w = Px \in PX, \ y = (I - P)x \in (I - P)X$, lo cual prueba que $X = PX \ + \ (I - P)X$. Ahora resta ver que la expresión $x = w \ + \ y$ es única para esto suponga que existen $w' \in PX, \ y' \in (I - P)$ tales que $w \ + \ y = w' \ + \ y$; aplicando la proyección P se tiene que,

$$Pw \ + \ Py = Pw' \ + \ Py' \quad (\blacklozenge)$$

Note que $Py = P(I - P)x = P(x - Px) = Px - PPx = Px - Px = 0$ similarmente como $y' \in (I - P)$ $\exists a \in X$ tal que $y' = (I - P)a$ entonces por el mismo argumento anterior $Py' = 0$ y por tanto $(\blacklozenge)$ *se reduce a* $Pw = Pw'$.
Luego como $w = Px \ \& \ w' = Px'$ para algún $x' \in X$, esto implica que $PPx = PPx' \ \Rightarrow Px = Px' \ \Rightarrow \ w = w'$.

$\square$

Definición 2.1.15.
Si $M, \ N$ son dos subespacios vectoriales invariantes para T tales que $X = M \oplus N$, se dice que T se descompone (o reduce) por el par $M, \ N$.
Más generalmente, se dice que T se descompone por el conjunto de subespacios $M_1, \ldots, M_s$ si $X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_S$ y todos los M_j son invariantes bajo T (o bien, se dice que T se descompone de acuerdo a la descomposición $X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_S$).

Observación 1.
Sean $M_1, \ldots, M_s$ subespacios vectoriales tales que

$$X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_S.$$

Cada $u \in X$ puede ser expresado en la forma $u = u_1 + \cdots + u_s, \ u_j \in M_j, \ j = 1, \ldots, s$, de manera única. El operador P_j definido por $P_j(u) = u_j$ es la proyeccción en M_j.

Proposición 2.
Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ *y* $M_1, \ldots, M_s$ *subespacios vectoriales tales que* $X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_S$*, consideremos las respectivas proyecciones* $P_j,\ j = 1, \ldots, s$.

$$y \in M_j \Leftrightarrow \ P_j(y) = y.$$

Demostración.
$[\Longrightarrow$
Es claro que si $y \in M_j$ entonces $P_j(y) = y$ por ser P una proyección.
$\Longleftarrow]$
Sup. que $P_j(y) = y$, como $y \in X$ entonces $y = a_1 + \cdots + a_j + \cdots + a_s,\ con\ a_j \in M_j$, aplicando P_j se tiene,

$$\begin{aligned} P_j(y) &= P_j(a_1 + \cdots + a_j + \cdots + a_s) \\ &= P_j(a_1) + P_j(a_2) + \cdots + P_j(a_j) + \cdots + P_j(a_s) \\ &= P_j(a_j) \ldots pues\ P_j(a_i) = 0\ para\ i \neq j. \\ &= a_j. \end{aligned}$$

Luego por lo supuesto, se sigue que $y = a_j$.

$$\therefore\ y \in M_j.$$

$\square$

Teorema 1.
Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ *y* $M_1, \ldots, M_s$ *subespacios vectoriales. Si*

$$X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_S \qquad (\Diamond)$$

y consideremos las respectivas proyecciones $P_j,\ j = 1, \ldots, s$ *(ver observación 1). Entonces* T *se descompone de acuerdo a* $(\Diamond)$ *si y sólo si* T *conmuta con cada* P_j.

Demostración.
$[\Longrightarrow$
Sea $j \in 1, \ldots, s$ fija. Por lo supuesto podemos restringir T a M_j, esto es, $T : M_j \to M_j$ está bien definida. Sea $x = u_1 + \cdots + u_s \in X$, luego

$$TP_j(x) = T(u_j) \in M_j,$$

por ser P una proyección. Por otro lado,

$$\begin{aligned} P_jT(x) &= P_j(T(u_1) + \cdots + T(u_s)) \\ &= P_jT(u_1) + P_jT(u_2) + \cdots + P_jT(u_j) + \cdots + P_jT(u_s) \\ &= P_jT(u_j) \ldots pues\ T(u_j) \in M_j\ y\ P_jT(u_i) = 0\ para\ i \neq j. \\ &= T(u_j). \end{aligned}$$

$$\therefore\ P_jT = TP_j.$$

$\Longleftarrow$]
Ahora supongamos que $P_jT = TP_j, \;\; \forall j = 1, \ldots, s$. Debemos probar que cada M_j es invariante bajo T.
Sean $j \in 1, \ldots, s$ y $m \in M_j$, observe lo siguiente;

$$\begin{aligned} P_jT(m) &= TP_j(m) \ldots \textit{ por lo supuesto} \\ &= T(m) \ldots \textit{ por prop. 2 pues } m \in M_j \end{aligned}$$

$$\therefore \; T(m) \in M_j.$$

□

2.2. Nociones Básicas de Análisis

Definición 2.2.1.
Una función $\| \cdot \|: X \to [0, \infty)$ *que satisface las siguientes condiciones,*

$$\begin{aligned} &\| \, u \, \| \geq 0; \quad \| \, u \, \| = 0 \Leftrightarrow u = 0. \\ &\| \, \alpha u \, \| = |\alpha| \, \| \, u \, \| \;\; (homogenidad). \\ &\| \, u + v \, \| \; \leq \; \| \, u \, \| + \| \, v \, \| \;\; (Desigualdad \; Triangular). \end{aligned}$$

para todo $u \in X$ *es llamada* *norma.*

Definición 2.2.2.
Un espacio normado es un caso especial de un espacio métrico en donde la distancia entre cualesquiera dos puntos está definida mediante una norma.

Nota 8.
En X *la distancia entre dos vectores* u, v *está definida por,* $\|u - v\|$.

Definición 2.2.3.
Una bola abierta de X *es el conjunto de puntos* $u \in X$ *tales que* $\|u - u_0\| < r$*, donde* u_0 *es el centro y* $r > 0$ *es el radio de la bola.*

Definición 2.2.4.
Dado $u \in X$*, cualquier subconjunto de* X *que contiene una bola con centro en* u *es llamada una vecindad de* u.

Definición 2.2.5.
Sea $S \subset X$*,* u *es un punto interior de* S *si* S *es una vecindad de* u.

Definición 2.2.6.
$S \subset X$ *es un abierto si consiste solo de puntos interiores.*

Definición 2.2.7.
Sean X*,* Y *espacios vectoriales normados y* $T : X \to Y$ *un operador se denota y define la norma de un operador por*

$$\|T\| = \sup_{0 \neq u \in X} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|Tu\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\|.$$

2.3. Definiciones y Teoremas de Variable Compleja

Definición 2.3.1.
Una función de variable compleja en un conjunto abierto se dice **analítica** *si tiene derivada en todo punto de ese abierto.*

Definición 2.3.2.
Una función **entera** *es una función analítica en todos los puntos del plano.*

Definición 2.3.3.
Si una función f no es analítica en un punto z_0 pero lo es en algún punto de toda bola alrededor de z_0, se dice que z_0, es un punto singular o una singularidad de f.

Definición 2.3.4.
Un domino D es simple (o simplemente conectado) si cada contorno cerrado simple C que se encuentra completamente en D puede reducirse a un punto sin dejar D. En otras palabras, si dibujamos cualquier contorno cerrado simple C de modo que quede completamente dentro de D, entonces C encierra solo puntos del domino D.

En 1825 el matemático francés Louis Augustin Cauchy probó uno de los resultados más importantes del análisis complejo.

Teorema 2 (Cauchy)**.**
Supongamos que una función f es analítica en un dominio simple D y que f' es continua en D. Entonces para cada contorno cerrado simple C en D,

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

En 1883 el matemático francés Edouard Goursat probó que la continuidad de f' no es necesaria para la conclusión del Teorema de Cauchy. La versión modificada del teorema de Cauchy es conocida hoy en día como el **Teorema de Cauchy-Goursat**.

Teorema 3 (Cauchy-Goursat)**.**
Supongamos que una función f es analítica en un dominio simple D. Entonces para cada contorno cerrado simple C en D,

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Teorema 4 (Fórmula Integral de Cauchy).
Supóngase que una función f es analítica en un dominio simple D y C es un contorno cerrado simple que está completamente dentro de D. Entonces para algún punto z_0 contenido en C,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Teorema 5 (Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas).
Supóngase que una función f es analítica en un dominio simple D y C es un contorno cerrado simple que está completamente dentro de D. Entonces para algún punto z_0 contenido en C,

$$f^k(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz$$

Teorema 6 (Taylor).
Sea f analítica dentro de un dominio D y sea z_0 un punto en D. Entonces f tiene la representación en serie

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

válida para el círculo C más garnde con centro en z_0 y radio R contenido en D.

Definición 2.3.5.
Suponga que z_0 es una singularidad de una función compleja f. El punto z_0 se dice que es una **singularidad aislada** *de la función f si existe alguna vecindad o disco abierto, $0 < |z-z_0| < R$, donde f es analítica.*

Teorema 7 (Laurent).
Sea f analítica dentro de un dominio anular D definido por $r < |z - z_0| < R$. Entonces f tiene la representación en serie

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

válida en D. Los coeficientes a_k están dados por

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}}\, ds \qquad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots\ ,$$

donde C es una curva simple cerrada que se encuentra contenida en D y tiene a z_0 en su interior.

Nota 9.
La representación en serie de Laurent también puede escribirse de la siguiente manera:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

Donde la parte con potencias negativas,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

es llamada la **parte principal** *de la serie y converge para* $|z-z_0| > r$.

La parte que consiste de potencias no negativas

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k,$$

es llamada la **parte analítica** *de la serie y converge para* $|z-z_0| < R$. *Por tanto la suma total converge cuando* z *satisface que* $|z-z_0| > r$. *Es importante enfatizar que así la serie de Laurent tiene sentido para* $r < |z-z_0| < R$.

3. El Espectro de T y el Conjunto Resolvente

A lo largo de todas las siguientes secciones consideremos X espacio vectorial con $0 < dimX < \infty$ y $T \in \mathcal{B}(X)$.

Observación 2.
Vale la pena resaltar que algunas definiciones y resultados que se mencionarán a continuación solo son válidas en espacios vectoriales de dimensión finita, de ahí la importancia de la consideración anterior.

Definición 3.0.1.
El conjunto de todos los eigenvalores de T *es llamado el* **Espectro de T**. *Se denota por* $\sum(T)$ *o bien por* $\sigma(T)$.

Nota 10.
Pongamos $dimX = N$ *y consideremos los eigenvalores* λ_h *con* $h = 1, 2, \ldots, s$, *donde* $s \in \mathbb{N}$ *y* $s \leq N$.

3.1. La Resolvente

Consideremos la ecuación lineal no homogénea

$$(T-\xi)u = v$$

donde ξ es un número complejo dado, $v \in X$ fijo y $u \in X$ es nuestro vector incógnita; esta ecuación tiene una solución u para cada v, para esto es necesario y suficiente que $T - \xi$ sea no singular, esto es, ξ es distinto de cualquier eigenvalor λ_h de T. Así la inversa $(T - \xi)^{-1}$ existe y la solución u está dada por

$$u = (T - \xi)^{-1}v.$$

El operador

$$R(\xi) = R(\xi, T) = (T - \xi)^{-1}$$

es llamado la resolvente de T.

De aqui que se define y denota el conjunto resolvente

$$\rho(T) = \{\xi \in \mathbb{C} \mid (T - \xi I)^{-1} existe\}.$$

En otras palabras es el conjunto de todos los números complejos distintos de cualquier eigenvalor de T para los cuales la inversa de la difrencia $T - \xi$ exista. La resolvente $R(\xi)$ está así definida para $\xi \in \rho(T)$.

Una importante propiedad de la resolvente es que satisface la *ecuación resolvente*:

$$R(\xi_1) - R(\xi_2) = (\xi_1 - \xi_2)R(\xi_1)R(\xi_2)$$

La cual puede verificarse fácilmente. En efecto;

$$\begin{aligned} R(\xi_1) - R(\xi_2) &= (T - \xi_1)^{-1} - (T - \xi_2)^{-1} \\ &= (T - \xi_1)^{-1}[(T - \xi_2) - (T - \xi_1)](T - \xi_2)^{-1} \\ &= (T - \xi_1)^{-1}(\xi_1 - \xi_2)(T - \xi_2)^{-1} \\ &= (\xi_1 - \xi_2)R(\xi_1)R(\xi_2). \end{aligned}$$

□

3.2. Las Singularidades de la Resolvente

Las singularidades de $R(\xi)$ son exactamente los eigenvalores $\lambda_h, \ h = 1, 2, \ldots, s$ de T. Consideremos la serie de Laurent de $R(\xi)$ en $\xi = \lambda_h$. Por simplicidad supongamos por el momento que $\lambda_h = 0$ y escribimos:

$$R(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi^n A_n \qquad (1)$$

Los coeficientes A_n están dados por

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \xi^{-n-1} R(\xi)\, d\xi \qquad (2)$$

donde Γ es un pequeño círculo orientado positivamente que contiene a $\xi = 0$ pero excluyendo otros eigenvalores de T. Dado que Γ puede ser expandida a un círculo Γ' un poco más grande sin cambiar (2), tenemos:

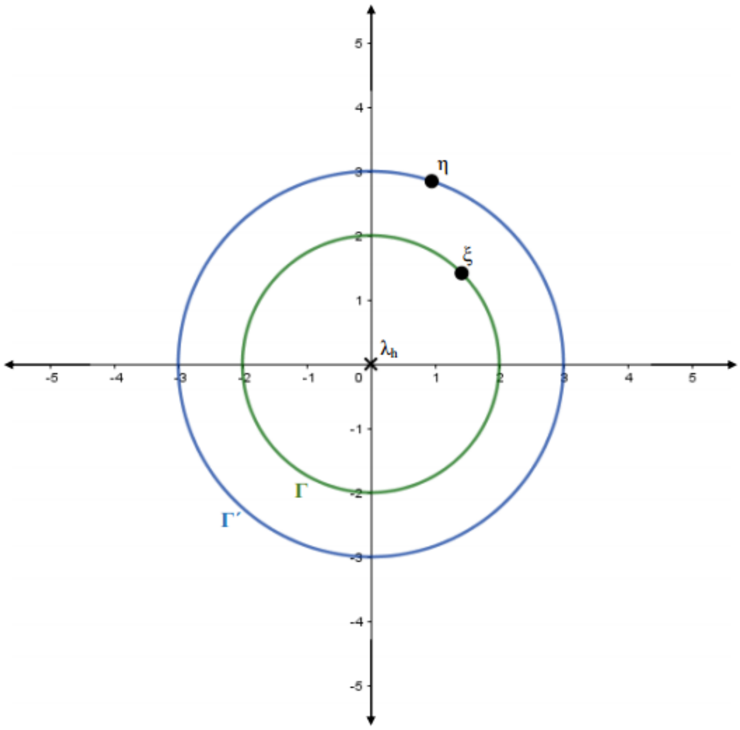

Figura 1: Región Γ *y* Γ'

$$\begin{aligned}
A_n A_m &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} \xi^{-n-1}\ \eta^{-m-1}\ R(\xi) R(\eta)\, d\xi\, d\eta \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} \xi^{-n-1}\ \eta^{-m-1}\ \frac{1}{\xi - \eta}\ [R(\xi) - R(\eta)]\, d\xi\, d\eta \quad \ldots \textit{usando la ec. resolvente.} \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} \xi^{-n-1}\ \frac{\eta^{-m-1}}{\xi - \eta}\ R(\xi)\, d\eta\, d\xi - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} \xi^{-n-1}\ \frac{\eta^{-m-1}}{\xi - \eta}\ R(\eta)\, d\eta\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \xi^{-n-1}\ R(\xi) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\eta^{-m-1}}{\xi - \eta}\, d\eta \right)}_{(*)} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \eta^{-m-1}\ R(\eta) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\xi^{-n-1}}{\xi - \eta}\, d\xi \right)}_{(**)} d\eta
\end{aligned}$$

.

Ahora resolveremos detalladamente las integrales $(*)$ y $(**)$.

Para $(*)$ hacemos lo siguiente; primero consideramos $m \geq 0$ y con ayuda de la figura (2) se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{\eta^{-m-1}}{\xi-\eta}\,d\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1'} \frac{(\xi-\eta)^{-1}}{(\eta-0)^{m+1}}\,d\eta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2'} \frac{\eta^{-m-1}}{(\xi-\eta)}\,d\eta$$

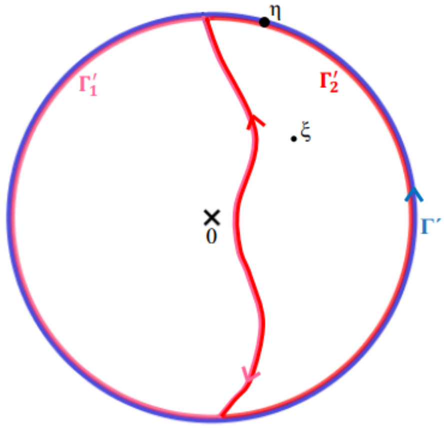

Figura 2: Curvas Γ_1' y Γ_2'

Para la integral sobre Γ_1' utilizamos la forma integral de Cauchy para derivadas, debido a que la función $(\xi-\eta)^{-1}$ es analítica en Γ_1' y para Γ_2' aplicaremos simplemente la forma integral de Cauchy, notando que η^{-m-1} es analítica en Γ_2' $\forall\, m \in \mathbb{N}$, en particular para $m \geq 0$. Obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{\eta^{-m-1}}{\xi-\eta}\,d\eta &= \left(\frac{1}{m!}\,\frac{d^m}{d\eta^m}\,(\xi-\eta)^{-1}\right)\Bigg|_{\eta=0} + \left(-\eta^{-m-1}\Big|_{\eta=\xi}\right) \\
&= \frac{1}{m!}\left(m!(\xi-\eta)^{-m-1}\Big|_{\eta=0}\right) - \xi^{-m-1} \\
&= \xi^{-m-1} - \xi^{-m-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora si consideramos naturales $m \leq -1$ entonces las potencias de η^{-m-1} se vuelven positivas o bien cero para el caso $m = -1$ y e tiene que;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{\eta^{-m-1}}{\xi-\eta}\,d\eta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1'} \frac{\eta^{-m-1}}{\xi-\eta}\,d\eta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2'} \frac{\eta^{-m-1}}{-(\eta-\xi)}\,d\eta \\
&= 0 + (-\eta^{-m-1})\big|_{\eta=\xi} \\
&= -\xi^{-m-1};
\end{aligned}$$

donde, la función $\dfrac{\eta^{-m-1}}{\xi-\eta}$ es analítica sobre Γ_1' por lo cual el teorema de Cauchy nos dice que la integral es cero, y para la integral sobre Γ_2' se observa que η^{-m-1} es analítica y se puede aplicar la fórmula integral de Cauchy.
Por tanto el resultado de la integral $(*)$ es:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{\eta^{-m-1}}{\xi-\eta}\,d\eta = \begin{cases} 0 & , \ m \geq 0 \\ -\xi^{-m-1} & , \ m \leq -1 \end{cases}$$

Similarmente resolvemos $(**)$.

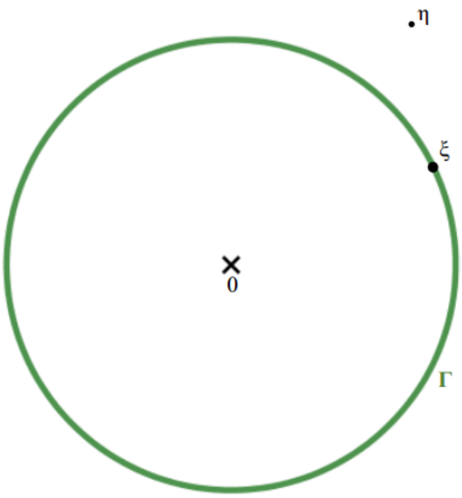

Figura 3: Curva Γ

Para $n \geq 0$ se observa que $(\xi - \eta)^{-1}$ es analítica en todo Γ y es posible aplicar la fórmula integral de Cauchy, esto es;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{(\xi)^{-n-1}}{\xi - \eta}\, d\xi &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{(\xi-\eta)^{-1}}{(\xi - 0)^{n+1}}\, d\xi \\
&= \left(\frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{d\xi^n}\,(\xi-\eta)^{-1}\right)\Bigg|_{\xi=0} \\
&= \frac{1}{n!}\left(m!(-1)^n(\xi-\eta)^{-n-1}\Bigg|_{\xi=0}\right) \\
&= (-1)^n\,(-\eta)^{-n-1} \\
&= (-1)^n(-1)^{-n-1}\,\eta^{-n-1} \\
&= -\eta^{-n-1}
\end{aligned}$$

Para $n \leq 0$ podemos extender Γ mientras no alcance a otro eigenvalor y resolvemos la integral sobre Γ diviendendo en dos curvas Γ_1 y Γ_2 orientadas en sentido contrario tal como se muestra en la siguiente figura.

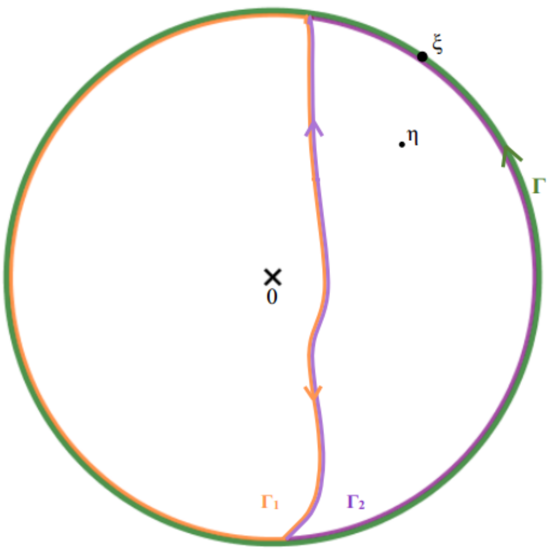

Figura 4: Curvas Γ_1 y Γ_2

Notamos que sobre Γ_1 se puede utilizar la fórmula integral de Cauchy para derivadas y en Γ_2 se tiene que las potencias $-n-1$ se vuelven mayores o iguales a cero, así la función ξ^{-n-1} es analítica y aplicamos la fórmula integral de Cauchy, entonces;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\xi^{-n-1}}{\xi-\eta}\,d\xi &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{(\xi-\eta)^{-1}}{(\xi-0)^{n+1}}\,d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{\xi^{-n-1}}{\xi-\eta}\,d\xi \\
&= \left(\frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{d\xi^n}\,(\xi-\eta)^{-1}\right)\Big|_{\xi=0} + \left(\xi^{-n-1}\Big|_{\xi=\eta}\right) \\
&= -\eta^{-n-1} + \eta^{-n-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado de la integral $(**)$ es:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\xi^{-n-1}}{\xi-\eta}\,d\eta = \begin{cases} 0 & ,\ n\leq -1 \\ -\eta^{-n-1} & ,\ n\geq 0 \end{cases}$$

De todo lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
A_nA_m &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \xi^{-n-1}R(\xi)\begin{cases} 0 & ,\ m\geq 0 \\ -\xi^{-m-1} & ,\ m\leq -1 \end{cases} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \eta^{-m-1}R(\eta)\begin{cases} -\eta^{-n-1} & ,\ n\geq 0 \\ 0 & ,\ n\leq -1 \end{cases} d\eta \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \xi^{-n-m-2}\,R(\xi)\,(1-\zeta_m)\,d\xi \;+\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \eta^{-n-m-2}\,R(\eta)\,\zeta_n\,d\eta
\end{aligned}$$

donde $\zeta_{n,m}=1$ para $n,\ m\geq 0$ y $\zeta_{n,m}=0$ para $n,\ m\leq -1$.

Teniendo en cuenta que Γ' se encuentra fuera de Γ, tenemos finalmente que:

$$\begin{aligned}
A_nA_m &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \xi^{-n-m-2}\,R(\xi)\,(\zeta_n+\zeta_m-1)\,d\xi \\
&= \frac{\zeta_n+\zeta_m-1}{2\pi i}\int_\Gamma \xi^{-(n+m+1)-1}\,R(\xi)\,d\xi \\
&= (\zeta_n+\zeta_m-1)\,A_{n+m+1} \qquad \ldots\ (\bigstar)
\end{aligned}$$

Apoyándomos de la igualdad ($\bigstar$) obtenemos lo siguiente:

Para $n = m = -1$ se tienen que $A_{-1}^2 = A_{-1}A_{-1} = (0+0-1)\ A_{0+0-1} = -A_{-1}$. Así A_{-1} es una proyección y la denotaremos por P.

Para $n,\ m < 0$ se tiene;
Si $n = m = -2$ entonces $A_{-2}^2 = -A_{-3}$.
Si $n = m = -3$ entonces $A_{-3}^2 = -A_{-5}$.
Si $n = m = -4$ entonces $A_{-4}^2 = -A_{-7}$.
Si $n = m = -5$ entonces $A_{-5}^2 = -A_{-9}$.
Si $n = -2$ y $m = -3$ entonces $A_{-2}A_{-3} = -A_{-4}$.
Si $n = -3$ y $m = -4$ entonces $A_{-3}A_{-4} = -A_{-6}$.
Si $n = -4$ y $m = -5$ entonces $A_{-4}A_{-5} = -A_{-8}$.
Si $n = -5$ y $m = -6$ entonces $A_{-5}A_{-6} = -A_{-10}$.

Poniendo $-A_{-2} = D$, se observa que;
$A_{-2}^2 = D^2 = -A_{-3},\ \ A_{-2}A_{-3} = D^3 = -A_{-4},\ \ A_{-3}^2 = D^4 = -A_{-5},\ \ A_{-3}A_{-4} = D^5 = -A_{-6}, \ldots$

$A_{-2} = -D,\ \ A_{-3} = -D^2,\ \ A_{-4} = -D^3,\ \ A_{-5} = -D^4,\ \ A_{-6} = -D^5, \ldots$

$$\therefore\ A_{-k} = -D^{-k-1},\ para\ k \geq 2.$$

Similarmente se obtiene que $A_n = S^{n+1}$ para $n \geq 0$.

Regresando al caso general en el cual $\xi = \lambda_h$ es la singularidad en lugar de $\xi = 0$, la serie de Laurent toma la forma

$$\begin{aligned}
R(\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\xi - \lambda_h)^n A_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - \lambda_h)^n A_n + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi - \lambda_h)^{-n} A_{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - \lambda_h)^n S^{n+1}\ +\ (\xi - \lambda_h)^{-1}\ A_{-1}\ +\ \sum_{n=2}^{\infty} (\xi - \lambda_h)^{-n} A_{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - \lambda_h)^n S^{n+1}\ -\ (\xi - \lambda_h)^{-1}\ P\ -\ \sum_{n=2}^{\infty} (\xi - \lambda_h)^{-n} D^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - \lambda_h)^n S^{n+1}\ -\ (\xi - \lambda_h)^{-1}\ P\ -\ \sum_{n=1}^{\infty} (\xi - \lambda_h)^{-n-1} D^{n}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ R(\xi) = -\ (\xi - \lambda_h)^{-1}\ P\ -\ \sum_{n=1}^{\infty} (\xi - \lambda_h)^{-n-1} D^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - \lambda_h)^n S^{n+1} \quad \ldots(\mathbf{3})$$

Utilizando nuevamente la igualdad ($\bigstar$) para $n = -1,\ m = -2$ se tiene que
$D = -A_{-2} = A_{-1}A_{-2} = -P\,(-D) = PD,\ \ DP = A_{-2}A_{-1} = -A_{-2} = D\ \Rightarrow\ \underline{DP = PD = D}$ (4).

Y para $n = -1, \ m = 0,$

$$0 = A_{-1}A_0 = -PS, \quad S\ (-P) = A_0 A_{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{PS = SP = 0} \quad (5).$$

Así, (3) representa una descomposición del operador $R(\xi)$ de acuerdo a la descomposición $X = M \oplus M'$, donde $M = PX$ (rango de P) y $M' = (I - P)X$.
En efecto, por la proposición 1 se tiene que la suma directa está bien definida y por el teorema 1 para ver que $R(\xi)$ se descompone de acuerdo con $X = M \oplus M'$ basta ver que $R(\xi)$ conmuta con las proyeciones P_j correspondientes que en este caso son $P\ y\ (I - P)$; al hacer las correspondientes composiciones y teniendo en cuenta las igualdades (4), (5) y que P es idempotente, se tiene

$$\begin{aligned} R(\xi)P &= -\ (\xi - \lambda_h)^{-1}\ PP\ -\ \sum_{n=1}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^{-n-1}D^n\ P + \sum_{n=0}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^n S^{n+1}\ P \\ &= (\xi - \lambda_h)^{-1}\ P\ -\ \sum_{n=1}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^{-n-1}D^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PR(\xi) &= -\ P\left((\xi - \lambda_h)^{-1}\ P\right) -\ P\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^{-n-1}D^n\right) + P\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^n S^{n+1}\right) \\ &= -\ (\xi - \lambda_h)^{-1}\ PP\ -\ \sum_{n=1}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^{-n-1}\ PD^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^n\ PS^{n+1} \\ &= (\xi - \lambda_h)^{-1}\ P\ -\ \sum_{n=1}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^{-n-1}D^n \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} R(\xi)(I - P) &= -(\xi - \lambda_h)^{-1}P(I - P) - \left(\sum_{n=1}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^{-n-1}D^n\right)(I - P) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^n S^{n+1}\right)(I - P) \\ &= -(\xi - \lambda_h)^{-1}\ P + (\xi - \lambda_h)^{-1}\ PP - \sum_{n=1}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^{-n-1}D^n + \sum_{n=1}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^{-n-1}D^n P \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^n S^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^n S^{n+1} P. \end{aligned}$$

Así $\ R(\xi)(I - P) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\xi - \lambda_h)^n S^{n+1}.$

Similarmente,

$$(I-P)R(\xi) = (I-P)\left(-(\xi-\lambda_h)^{-1}P\right) - (I-P)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\xi-\lambda_h)^{-n-1}D^n\right) + (I-P)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\xi-\lambda_h)^{n}S^{n+1}\right)$$

$$= -(\xi-\lambda_h)^{-1}\ P + (\xi-\lambda_h)^{-1}\ PP - \sum_{n=1}^{\infty}(\xi-\lambda_h)^{-n-1}D^n + \sum_{n=1}^{\infty}(\xi-\lambda_h)^{-n-1}PD^n.$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\xi-\lambda_h)^{n}S^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(\xi-\lambda_h)^{n}PS^{n+1},$$

de aquí que, $(I-P)R(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}(\xi-\lambda_h)^{n}S^{n+1}$.

Por lo tanto $R(\xi)P = PR(\xi)$ y $R(\xi)(I-P) = (I-P)R(\xi)$, y esto prueba que $R(\xi)$ se descompone de acuerdo con $X = M \oplus M'$

$\square$

Antes de continuar necesitamos la siguiente definición y proposiciones.

Definición 3.2.1.
Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Se define y se denota el radio espectral de T por,

$$sprT = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n=1,2,\dots} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Nota 11.
El radio espectral de T es independiente de la norma utilizada.

Proposición 3.
Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. El $sprT = 0$ si y soló si T es nilpotente.

Proposición 4.
Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Consideremos la serie de Neumann

$$S(t) = (I - tT)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\ T^n$$

con un parámetro $t \in \mathbb{C}$. Entonces esta serie es absolutamente convergente para $|t| < \frac{1}{sprT}$. Más aún, el radio de convergencia r es exactamente $\dfrac{1}{sprT}$.

Ahora obsérvese lo siguiente.
Estudiaremos un poco más a detalle el comportamiento de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\xi-\lambda_h)^{-n-1}D^n \ \ldots(6)$$

Note que dicha serie está definida en un anillo anular $r_1 < |z-\lambda_h| < r_2$ y más aún (6) es absolutamente convergente cuando $|\xi-\lambda_h| = \dfrac{r_1+r_2}{2}$. Luego,

$$|\xi-\lambda_h| > \frac{r_1+r_2}{2} \ \Rightarrow \ |\xi-\lambda_h|^{n+1} > \left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^{n+1} \ \Rightarrow \ |\xi-\lambda_h|^{-n-1} < \left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^{-n-1}$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi-\lambda_h|^{-n-1}\|D^n\| < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^{-n-1}\|D^n\| < \infty$$

De donde se obtiene que

- Si $|\xi-\lambda_h| > r_2$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\xi-\lambda_h)^{-n-1}D^n$ es convergente.
- Si r_2 es arbitrariamente pequeño, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\xi-\lambda_h)^{-n-1}D^n$ es convergente.

Ambos casos se cumplen para $\xi-\lambda_h \neq 0$, y así se puede concluir que el radio de convergencia de dicha serie es ∞.
Ahora si definimos $\mu = (\xi-\lambda_h)^{-1}$, la serie (6) se convierte en

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{n+1}D^n = \mu \ \sum_{n=1}^{\infty}\mu^n D^n,$$

Dado que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mu^n D^n$ es una serie de Neumann por la proposición 4 se sigue que su radio de convergencia es $r=\frac{1}{sprD}$, pero por otro lado hemos visto que $r=\infty$, por tanto

$$\frac{1}{sprD} = \infty \ \Rightarrow \ sprD = 0,$$

pero si $sprD = 0$ entonces por proposición 3, D es nilpotente, esto es D^m para algún entero positivo m.

Nota 12.
Dado que tenemos $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ eigenvalores, para una mejor indicación de correspondencia entre los operadores y cada eigenvalor λ_h, $h \in \{1, \ldots, s\}$ le añadiremos el subíndice "h" a los operadores, P, D, S y a los enteros positivos m que existen y hacen que D sea nilpotente.
Incluimos la notación:

$$P_h,\ D_h,\ S_h \ \ y \ \ m_h \ \ \textit{para cada}\ h \in \{1, \ldots, s\}.$$

Proposición 5.
Sea P_h una proyección. Para diferentes h se satisface las siguientes relaciones:

$$P_h P_k = \delta_{hk} P_h, \quad \sum_{h=1}^{s} P_h = I, \quad P_h T = T P_h$$

Regresando a la expansión de la serie de Laurent de $R(\xi)$ se observa por todo lo descrito anteriormente que tiene una singularidad aislada por cada λ_h, y por ser D_h nilpotente la parte principal (potencias negativas, ver nota 9) en la expansión (3) es finita y se pude probar que es una función entera.
Veamos que es entera para el caso donde se tienen dos eigenvalores, λ_1 *y* λ_2.
Dado que $R(\xi) = (T - \xi)^{-1}$ es analítica en todo $\mathbb{C}$ excepto en $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ y en este caso s=2. Definimos

$$R_1(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (\xi - \lambda_1)^n A_n^{(1)},$$

donde $A_n^{(1)} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_1} \dfrac{R(\xi)}{(\xi - \lambda_1)}$, note que R_1 está bien definida en $\mathbb{C}$ con singularidad en λ_1, hacemos

$$\widehat{R_1}(\xi) = R(\xi) - R_1(\xi),$$

la cual es analítica en todo $\mathbb{C}$ excepto en λ_2 (pues $R_1(\xi)$ le ha "quitado" la singularidad en λ_1).
De forma análoga definimos

$$R_2(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (\xi - \lambda_2)^n A_n^{(2)},$$

donde $A_n^{(2)} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_2} \dfrac{\widehat{R_1}(\xi)}{(\xi - \lambda_2)}$, R_2 es analítica en $\mathbb{C}$ con singularidad en λ_2, hacemos

$$\widehat{R_2}(\xi) = \widehat{R_1}(\xi) - R_2(\xi),$$

es claro que $\widehat{R_2}(\xi)$ es analítica en todo $\mathbb{C}$, es decir, es entera. Además es fácil darse cuenta de que los coeficientes $A_n^{(2)}$ de $\widehat{R_2}(\xi)$ son iguales a $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_2} \dfrac{R(\xi)}{(\xi - \lambda_2)^{n+1}}$.

De esta forma es como utilizando los nuevos operadores $\widehat{R_1}$ y $\widehat{R_2}$ podemos de alguna manera deshacernos de las singularidades (eigenvalores) de la resolvente y por tanto $R(\xi)$ es entera. De manera idéntica podemos aplicar los argumentos anteriores al caso general donde tenemos s eigenvalores. Otro hecho importante del cual no es muy difícil convencerse de su veracidad es que la función S_h^{n+1} decae y esto implica que $\sum_{n=0}^{\infty}(\xi-\lambda_h)^n S_h^{n+1}$ se anule, así la ecuación (3) se convierte en:

$$R(\xi) = -\sum_{h=1}^{s}\left[(\xi-\lambda_h)^{-1}P_h + \sum_{n=1}^{m_h-1}(\xi-\lambda_h)^{-n-1}D_h^n\right].$$

Multiplicando (2) por T ya sea por la izquierda o por la derecha y notando que $TR(\xi) = R(\xi)T = I + R(\xi)$, se obtiene $TA_n = A_nT = \delta_{n0} + A_{n-1}$. Si la singularidad está en $\xi = \lambda_h$ en lugar de $\xi = 0$, para $n = 0$ y $n = -1$

$$(7)\begin{cases}(T-\lambda_h)S_h = S_h(T-\lambda_h) = I - P_h,\\ P_h(T-\lambda_h) = (T-\lambda_h)P_h = D_h.\end{cases}$$

Para cada $h = 1, \ldots, s$, la parte holomorfa (analítica) de la expansión de Laurent es llamada **resolvente reducida** de T con respecto al eigenvalor λ_h; la denotamos por $S_h(\xi)$

$$S_h(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}(\xi-\lambda_h)^n S_h^{n+1}.$$

Se desprende de (4), (5) y (7) que

$$S_h = S_h(\lambda_h), \quad S_h(\xi)P_h = P_hS_h(\xi) = 0,$$

$$(T-\xi)S_h(\xi) = S_h(\xi)(T-\xi) = I - P_h.$$

Las últimas igualdades muestran que las partes de $T-\xi$ y de $S_h(\xi)$ en el subespacio invariante $M_h' = (I-P_h)X$ son la inversa la una de la otra.

4. Forma Canónica de Jordan

Denotando como antes por M_h al rango de la proyección P_h, $h = 1, \ldots, s$, tenemos

$$X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s \qquad (8)$$

Como los P_h conmutan con T como ya fué explicado anteriormente T se descompone de acuerdo con la descomposición (8).

Definición 4.0.1.
Cualquier vector $u \neq 0$ de M_h es llamado un <u>eigenvector generalizado</u> (o vector principal) para el eigenvalor λ_h de T.

Se deduce de (7) que

$$(9) \quad TP_h = P_h T = P_h T P_h = \lambda_h P_h + D_h, \quad h = 1, \ldots, s.$$

Así la parte de T_{M_h} (restrición) de T en el subespacio invariante M_h es la suma de un operador escalar λ_h y una nilpotente D_{h,M_h} (la parte de D_h en M_h).
Adicionalmente de las s ecuaciones de (9) dadas por la proposición 5 se tiene

$$T = S + D \qquad (10)$$

donde

$$S = \sum_h \lambda_h P_h \qquad (11)$$

$$D = \sum_h D_h \qquad (12)$$

Definición 4.0.2.
Un operador S de la forma (11) donde $\lambda_h \neq \lambda_h$ para $h \neq k$ y que P_h satisface la proposición se dice diagonalizable (diagonal o semi simple).

Proposición 6.
$D = \sum_h D_h$ *conmuta con* $S = \sum_h \lambda_h P_h$.

La igualdad (10) muestra que *cada operador $T \in \mathcal{B}(X)$ puede ser expresado como la suma de un operador diagonal S y un nilpotente D que conmuta con S.*
(10) es llamada la *representación espectral de T.*

Proposición 7.
La representación espectral es única en el siguiente sentido: si T es la suma de un operador diagonal S y un nilpotente D que conmuta con S, entonces S y D deben estar dados por (11) y (12) respectivamente.

La representación espectral (10) conduce a la *forma canónica de Jordan de T* (o bien lo es). Para esto solo es necesario tomar bases adecuadas para cada M_h y considerar sus respectivas representaciones matricales de las mismas y de las restrcciones T_{M_h}.
Lo más importante para remarcar de este resultado es que esto puede aplicarse a cualquier operador (o bien matriz) y así obtener su forma canónica de Jordan.

Referencias

[1] KATO, TOSIO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, 1980.

[2] DENNIS G. ZILL, PATRICK D. SHANAHAN, *A first course in complex analysis with applications*, Jones and Bartlett Publishers, 2003.

[3] CHURCHILL RUEL V. , BROWN WARD JAMES, *Variable Compleja y Aplicaciones*, McGraw-Hill, 1992.

[4] KNOPP, K., *Theory of functions Parts I and II*, New York: Dover, 1945 y 1947.